POÉSIE ARISTOTÉLIENNE

SHIMON GARTI AND SAHARON SHELAH

Résumé. Nous prouvons que la force de consistance exacte de $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{n}{\omega_1}_\omega$ pour chaque $n \in \omega$ avec $\binom{\omega_2}{\omega_1} \nrightarrow \binom{\omega}{\omega_1}_\omega$ est un cardinal ω_1-Erdős. Nous prouvons que $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{2}{\kappa}_{<\kappa}$ implique $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\gamma}{\kappa}_{<\kappa}$ pour chaque $\gamma \in \kappa$ si κ est un cardinal fortement inaccessible.

We prove that the exact consistency strength of $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{n}{\omega_1}_\omega$ for every $n \in \omega$ with $\binom{\omega_2}{\omega_1} \nrightarrow \binom{\omega}{\omega_1}_\omega$ is an ω_1-Erdős cardinal. We also prove that if κ is strongly inaccessible then $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{2}{\kappa}_{<\kappa}$ implies $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\gamma}{\kappa}_{<\kappa}$ for every $\gamma \in \kappa$.

Key words and phrases. Relation polarisée, cardinaux inaccessibles.

MSC 2020. 03E02. La recherche a été financée par la subvention de ISF 1838/19. Ceci est la publication 1253 dans la list de Shelah.

0. Introduction

Nous considérons un problème sur les relations polarisées avec une infinité de couleurs. Rappelons que $\binom{\alpha}{\beta} \to \binom{\gamma}{\delta}_\chi$ dénote l'énoncé selon lequel pour toute coloration $c : \alpha \times \beta \to \chi$ on peut trouver $A \subseteq \alpha, B \subseteq \beta$ et $i \in \chi$ tel que $\mathrm{otp}(A) = \gamma, \mathrm{otp}(B) = \delta$ et $c''(A \times B) = \{i\}$. Le cas le plus étudié est $\beta = \kappa$ et $\alpha = \kappa^+$ pour un cardinal infini κ. Notre convention est que $\beta \leq \alpha$, et nous supposons tacitement que $\chi \in \kappa$, pour éviter les trivialités.

Dans cet article, le cardinal χ sera un cardinal infini, ce qui implique presque immédiatement une certaine force de cohérence par rapport aux relations positives. On peut le voir dans le résultat suivant (non publié) de Galvin. Rappelons que $\mathscr{T}$ est un arbre Kurepa si $h(\mathscr{T}) = \omega_1, |\mathcal{L}_\beta(\mathscr{T})| \leq \aleph_0$ pour chaque $\beta \in \omega_1$, et $\mathscr{T}$ contient au moins $\aleph_2$ branches distinctes.

Proposition 0.1. *S'il existe un arbre Kurepa alors* $\binom{\omega_2}{\omega_1} \nrightarrow \binom{2}{\omega_1}_\omega$.

Démonstration.
Supposons que $f, g : \omega_1 \to \{0,1\}$. Nous dirons que f et g sont presque disjointes si $|\{\beta \in \omega_1 \mid f(\beta) = g(\beta)\}| \leq \aleph_0$. Soit $\mathscr{T}$ un arbre Kurepa. Nous avons l'intention de construire une collection $\mathcal{F} = \{f_\alpha \mid \alpha \in \omega_2\} \subseteq {}^{\omega_1}\omega$ telle que $\mathcal{F}$ soit une famille de fonctions presque disjointes.

Pour tout $\beta \in \omega_1$ fixez une énumération $(t_{\beta n} : n \in \omega)$ des éléments de $\mathcal{L}_\beta(\mathscr{T})$. Soit $(b_\alpha : \alpha \in \omega_2)$ une énumération des ω_2 branches distinctes de $\mathscr{T}$. Pour tout $\alpha \in \omega_2$, définissez $f_\alpha : \omega_1 \to \omega$ comme suit :

$$f_\alpha(\beta) = m \Leftrightarrow b_\alpha \cap \mathcal{L}_\beta(\mathscr{T}) = t_{\beta m}$$

Notez que si $\alpha_0 < \alpha_1 < \omega_2$ alors pour un certain $\beta_0 \in \omega_1$ nous avons $b_{\alpha_0} \restriction \beta_0 = b_{\alpha_1} \restriction \beta_0$ et $b_{\alpha_0}(\beta) \neq b_{\alpha_1}(\beta)$ chaque fois que $\beta \in [\beta_0, \omega_1)$. Par la définition de nos fonctions nous voyons que $f_{\alpha_0}(\beta) \neq f_{\alpha_1}(\beta)$ pour tout $\beta \in [\beta_0, \omega_1)$.

Soit $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in \omega_2\}$. On peut conclure que $\mathcal{F}$ est presque disjointe. Il ne nous reste plus qu'à convertir une telle famille en une coloration qui illustre la relation négative $\binom{\omega_2}{\omega_1} \nrightarrow \binom{2}{\omega_1}_\omega$. Pour cela, définissons une coloration $c : \omega_2 \times \omega_1 \to \omega$ comme suit :

$$c(\alpha, \beta) = f_\alpha(\beta).$$

Si $\alpha_0 < \alpha_1 < \omega_2$ et $B \in [\omega_1]^{\omega_1}$ alors pour un $\beta \in B$ suffisamment grand on a $c(\alpha_0, \beta) = f_{\alpha_0}(\beta) \neq f_{\alpha_1}(\beta) = c(\alpha_1, \beta)$, donc la démonstration est accomplie. $\square_{0.1}$

Silver a prouvé que la non-existence des arbres Kurepa est équicohérente avec l'existence d'un cardinal fortement inaccessible. Du théorème de Silver on déduit que la relation positive $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{2}{\omega_1}_\omega$ nécessite au moins un cardinal fortement inaccessible. Mais la force de cohérence de cet énoncé est plus forte, et elle se situe autour d'un cardinal ω_1-Erdős, comme l'ont prouvé Donder et Levinski dans [DL89].

Dans le présent travail, nous nous intéressons à un phénomène d'intensification, reflété dans le théorème suivant du Baumgartner qui a montré dans

[Bau89] que si $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{2}{\omega_1}_\omega$ alors $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{n}{\omega_1}_\omega$ pour tout $n \in \omega$. Comme explicité dans [Bau89], cette affirmation a égalament été prouvée par Donder et Levinski. Une question naturelle est de savoir jusqu'où peut aller ce théorème d'intensification.

Dans [Gar20, Question 1.11], la question a été soulevé si $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{2}{\omega_1}_\omega$ implique la relation positive $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{\omega}{\omega_1}_\omega$. Dans cet article nous prouvons que la réponse est négative, et nous avons appris qu'une affirmation similaire a été prouvée par Zhang dans [Zha20]. Mais il existe une différence significative entre les deux preuves. La preuve de Zhang nécessite un cardinal supercompact, alors que notre preuve réduit cette hypothèse à un cardinal ω_1-Erdős. De plus, nous montrons qu'il s'agit là de la force de cohérence exacte.

Notre résultat principal peut être considéré comme le reflet d'un vieux débat entre Platon et Aristote, voir [Ari83]. Selon l'interprétation courante, Aristote a nié le concept d'infini réel mais a accepté l'idée d'infini potentiel. Par conséquent, on peut penser à un nombre naturel n arbitrairement grand, mais la collection de tous les nombres naturels n'existe pas. Le fait que la relation positive $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{n}{\omega_1}_\omega$ pour chaque n n'implique pas la relation $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{\omega}{\omega_1}_\omega$ est une version combinatoire de cette attitude.

Dans la deuxième partie de l'article, nous considérons des cardinaux plus grands. Le résultat ci-dessus montre que ω peut être le premier point sur lequel la relation polarisée $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{\alpha}{\omega_1}_\omega$ échoue. Remarquez que ω est strictement inférieur à la petite composante du domaine de la coloration. Nous prouvons que si κ est un cardinal fortement inaccessible, on peut obtenir l'implication suivante : $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{2}{\kappa}_{<\kappa}$ implique $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\gamma}{\kappa}_{<\kappa}$ pour chaque $\gamma \in \kappa$.

Notre notation est standard et suit les conventions de [Jec78]. Cependant, nous utilisons la notation forçante de Jérusalem, donc $p \leq q$ signifie que la condition p est plus faible que la condition q. Pour le contexte du calcul de partition, nous suggérons [HL10], [Wil77] et [EHMR84].

1. Réflexion aristotélicienne et force de consistance

Un cardinal infini λ est appelé ω_1-Erdős si $\lambda \to (\omega_1)^{<\omega}_2$. Ces cardinaux ont été étudiés de manière combinatoire dans [EHR65]. Plusieurs résultats profonds ont été établis par Silver dans sa thèse concernant ces cardinaux. Pour en savoir plus sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur à l'article de Silver [Sil71].

Théorème 1.1. *Supposons que λ est un cardinal ω_1-Erdős. Alors on peut forcer $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{n}{\omega_1}_\omega$ pour tout $n \in \omega$ et simultanément $\binom{\omega_2}{\omega_1} \nrightarrow \binom{\omega}{\omega_1}_\omega$.*

Démonstration.
On peut supposer que l'axiome de Martin avec $2^\omega = \omega_2$ est valable dans le modèle fondamental, puisqu'on peut le forcer tout en préservant le fait que λ est ω_1-Erdős. Nous définissons une notion de forcing $\mathbb{Q}$. Les conditions de $\mathbb{Q}$ se rapprocheront d'une coloration $c : \lambda \times \omega_1 \to \omega$. Cette coloration sera témoin (dans l'extension générique) de la relation négative $\binom{\lambda}{\omega_1} \nrightarrow \binom{\omega}{\omega_1}_\omega$. Parallèlement, tous les cardinaux inférieurs à λ seront reduits par $\mathbb{Q}$ à ω_1, mais λ sera préservé, donc $\lambda = \omega_2$ dans l'extension générique et la relation négative souhaitée sera établie. Ainsi, la relation positive $\binom{\omega_2}{\omega_1} \to \binom{n}{\omega_1}_\omega$ sera une conséquence du fait que λ est ω_1-Erdős dans le modèle fondamental.

Nous définissons les conditions de forcing et l'ordre. Une condition $p \in \mathbb{Q}$ est un quintuple $(\varepsilon, U, f, g, \mathcal{A}) = (\varepsilon^p, U^p, f^p, g^p, \mathcal{A}^p)$ tel que :

- (a) $\varepsilon \in \omega_1$.
- (b) $U \subseteq \lambda - \omega_1, |U| \leq \aleph_1$.
- (c) f et g sont des fonctions dont le domaine est U.
- (d) Si $\alpha \in U$ alors $f(\alpha)$ est une fonction bijective de ε dans $U \cup \alpha$.
- (e) Si $\alpha \in U$ alors $g(\alpha)$ est une fonction de ε dans ω.
- (f) $\mathcal{A} \subseteq [U]^{\aleph_0}$ et $|\mathcal{A}| \leq \aleph_1$.

Supposons maintenant que $p, q \in \mathbb{Q}$. Nous dirons que $p \leq_{\mathbb{Q}} q$ si $\varepsilon^p \leq \varepsilon^q, U^p \subseteq U^q, \mathcal{A}^p \subseteq \mathcal{A}^q$ et les exigences suivantes sont remplies :

- $(\aleph)$ Si $\alpha \in U^p$ alors $f^p(\alpha) \subseteq f^q(\alpha)$ et $g^p(\alpha) \subseteq g^q(\alpha)$.
- $(\beth)$ Si $u \in \mathcal{A}^p$ et $\varepsilon^p \leq \varepsilon < \varepsilon^q$ alors il y a $\alpha, \beta \in u$ tels que $\alpha \neq \beta$ et $g^q(\alpha)(\varepsilon) \neq g^q(\beta)(\varepsilon)$.

Rappelons que $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ sont des fonctions, donc l'inclusion dans la définition de l'ordre est une inclusion de fonctions.

La partie active de la condition est g, qui se rapproche d'un témoin de la relation négative souhaitée. Le rôle de f est de réduire tous les cardinaux strictement inférieurs à λ à ω_1. On peut vérifier que $\leq_{\mathbb{Q}}$ est un ordre partiel, donc $\mathbb{Q}$ est une notion de forcing.

Si $(p_n : n \in \omega)$ est une suite croissante de conditions dans $\mathbb{Q}$ alors elle a une limite supérieure (en fait, une limite supérieure minimale). Pour voir cela posons $\varepsilon = \bigcup_{n\in\omega} \varepsilon^{p_n}$ et $U = \bigcup_{n\in\omega} U^{p_n}$. Notons que $\varepsilon \in \omega_1$, $U \subseteq \lambda - \omega_1$ et $|U| \leq \aleph_1$. De même, soit $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}^{p_n}$ et pour tout $\alpha \in U$ soit $f(\alpha) =$

$\bigcup\{f^{p_n}(\alpha) : \alpha \in U^{p_n}, n \in \omega\}$ et $g(\alpha) = \bigcup\{g^{p_n}(\alpha) : \alpha \in U^{p_n}, n \in \omega\}$. Fixons $q = (\varepsilon, U, f, g, \mathcal{A})$ et notons que $p_n \leq_{\mathbb{Q}} q$ pour tout $n \in \omega$.

Fixez $G \subseteq \mathbb{Q}$ qui est V-générique. Il s'ensuit que $\aleph_1$ est préservé dans $V[G]$. Puisque tous les objets dans une condition donnée sont de taille au plus $\aleph_1$ et que $\lambda^{\omega_1} = \lambda$, on peut déduire d'un argument du système Delta que $\mathbb{Q}$ est λ-cc, donc λ est également préservé dans $V[G]$. Notez cependant que si $\kappa \in (\omega_1, \lambda)$ alors la partie f des conditions ajoutera une application de ω_1 sur κ, donc κ sera un ordinal de taille $\aleph_1$ dans $V[G]$ et $\lambda = \omega_2$ dans $V[G]$. Ce fait sera prouvé ci-dessous de manière formelle.

Nous définissons deux types de sous-ensembles ouverts et denses de $\mathbb{Q}$. Premièrement, pour tout $\alpha < \beta < \lambda$ et chaque $\varepsilon \in \omega_1$ nous définissons :

$$D_{\alpha\beta\varepsilon} = \{p \in \mathbb{Q} : \alpha, \beta \in U^p, \varepsilon \leq \varepsilon^p, \beta \in \operatorname{rang}(f^q(\alpha))\}.$$

Montrons que chaque $D_{\alpha\beta\varepsilon}$ est ouvert et dense. L'ouverture de $D_{\alpha\beta\varepsilon}$ découle directement des définitions. Pour la densité, supposons que $p \in \mathbb{Q}$ mais $p \notin D_{\alpha\beta\varepsilon}$. Essayons de définir une condition q telle que $p \leq q \in D_{\alpha\beta\varepsilon}$.

Choisissez $\varepsilon^q \geq \varepsilon$ tel que $\varepsilon^p + \omega < \varepsilon^q$. Définissez $U^q = U^p \cup \{\alpha, \beta\} \cup \omega_1$. Pour chaque $\gamma \in U^p$ soit $f^q(\gamma)$ une fonction biunivoque de ε^q dans U^q telle que $f^q(\gamma) \supseteq f^p(\gamma)$. Ceci est possible puisque $\varepsilon^q \in \omega_1$ et $|U^q| = \aleph_1$. De même, pour $\gamma = \beta$ on impose que $\alpha \in \operatorname{rang}(f^q(\beta))$. Ceci est possible puisque $\varepsilon^p < \varepsilon^q$ et donc on peut choisir $i \in \varepsilon^q - \varepsilon^p$ et poser $f^q(\beta)(i) = \alpha$.

La mission intéressante est la définition de g^q, et ici nous devons être attentifs à la partie ($\sqsupseteq$) de la définition de l'ordre. On définit $\mathcal{A}^q = \mathcal{A}^p$ et si $\gamma \in U^p$ alors $g^q(\gamma) \restriction \varepsilon^p = g^p(\gamma) \restriction \varepsilon^p$, et si $\gamma \in U^q - U^p$ alors $g^q(\gamma) \restriction \varepsilon^p$ est constamment nul. Maintenant pour tout $\gamma \in U^q$ et chaque $\zeta \in [\varepsilon^p, \varepsilon^q)$ on choisit $g^q(\gamma)(\zeta)$ tel que pour tout $u \in \mathcal{A}^p = \mathcal{A}^q$ la suite $(g^q(\gamma)(\zeta) : \gamma \in u)$ n'est pas constante. Ceci est possible grâce à l'axiome de Martin et $2^\omega = \omega_2$ (forcé au début de la preuve), mais nous faisons la commentaire que l'ajout de ω_2 réels de Cohen au lieu de MA aurait le même effet. Maintenant $q \in D_{\alpha\beta\varepsilon}$ (c'est la tâche facile ci-dessus) et $p \leq_{\mathbb{Q}} q$ (c'est la partie légerement plus ardue), donc $D_{\alpha\beta\varepsilon}$ est dense.

Pour tout $\alpha \in [\omega_1, \lambda)$ soit $\underset{\sim}{g}_\alpha = \bigcup\{g^p(\alpha) : p \in G, \alpha \in U^p\}$ et soit $\underset{\sim}{f}_\alpha = \bigcup\{f^p(\alpha) : p \in G, \alpha \in U^p\}$. De la densité des ensembles $D_{\alpha\beta\varepsilon}$ nous déduisons que $\underset{\sim}{f}_\alpha$ applique ω_1 sur α et donc tout $\kappa \in (\omega_1, \lambda)$ est réduit à $\aleph_1$. De même, $\underset{\sim}{g}_\alpha$ est une fonction de ω_1 à ω.

Deuxiémement, pour tout $u \in [\lambda]^{\aleph_0}$ nous définissons :

$$E_u = \{p \in \mathbb{Q} : u \in \mathcal{A}^p\}.$$

Clairement, chaque E_u est ouvert. Pour la densité de E_u remarquez que si $p \notin E_u$ alors on peut choisir $U^q \supseteq U^p$ tel que $u \subseteq U^q$, et ensuite on peut ajouter u à $\mathcal{A}^q$ en dfinissant f^q et g^q selon les exigences de $\leq_{\mathbb{Q}}$.

Pour accomplir la preuve de la relation négative nous combinons les $\underset{\sim}{g}_\alpha$s en une seule coloration $\underset{\sim}{c} : (\lambda - \omega_1) \times \omega_1 \to \omega$ (en fait, un nom d'une coloration). Ainsi pour $\alpha \in \lambda - \omega_1$ et $\beta \in \omega_1$, soit $\underset{\sim}{c}(\alpha, \beta) = \underset{\sim}{g}_\alpha(\beta)$ et soit $c = \underset{\sim}{c}[G]$. D'après les considérations ci-dessus, c est une coloration de $(\omega_2 - \omega_1) \times \omega_1$ à ω dans $V[G]$.

Supposons que $u \in [\omega_2 - \omega_1]^{\aleph_0}$ et $v \in [\omega_1]^{\aleph_1}$. Soit $p \in G$ une condition qui force ce fait. Choisissez $\alpha, \beta \in u$ et $\varepsilon \in v$ tels que $\alpha \neq \beta$ et $\varepsilon > \varepsilon^p$. Soit q tel que $p \leq q \in D_{\alpha\beta\varepsilon}$. Maintenant $q \Vdash \underset{\sim}{c}(\alpha, \varepsilon) = \underset{\sim}{g}_\alpha(\varepsilon) = \underset{\sim}{g}(\alpha)(\varepsilon) \neq \underset{\sim}{g}(\beta)(\varepsilon) = \underset{\sim}{g}_\beta(\varepsilon) = \underset{\sim}{c}(\beta, \varepsilon)$, et donc la relation négative $\binom{\omega_2}{\omega_1} \nrightarrow \binom{\omega}{\omega_1}_\omega$ est établie.

Il reste à prouver que la relation positive $\binom{\omega_2}{\omega_1} \rightarrow \binom{n}{\omega_1}_\omega$ est vraie dans $V[G]$ chaque fois que $n \in \omega$. D'après [Bau89], il suffit de limiter au cas $n = 2$. Rappelons que $\lambda \rightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$ et l'axiome de Martin avec $2^\omega = \omega_2$ sont valables dans le modèle fondamental.

Soit $\chi = \lambda^+$ et soit $<^*$ un bon ordre de $\mathcal{H}(\chi)$. Supposons que $p \in \mathbb{Q}$ et $p \Vdash \underset{\sim}{c} : \omega_2 \times \omega_1 \rightarrow \omega$. En supposant que λ est ω_1-Erdős nous choisissons un ensemble $U \subseteq \lambda$ tel que $\operatorname{otp}(U) = \omega_1$ et U est indiscernable dans la structure $(\mathcal{H}(\chi), \in, <^*, p, \mathbb{Q}, c)$. Autrement dit, si $\alpha, \beta \in U$ et $\alpha < \beta$ alors $U - \beta$ est indiscernable sur $\alpha = \{\gamma : \gamma \in \alpha\}$.

Pour notre argument, nous aimerions reformuler tout le précédent décor dans un sous-modèle élémentaire relativement petit. Soit N la coque de Skolem de $U \cup \{p, \mathbb{Q}, c\}$ dans $(\mathcal{H}(\chi), \in, <^*)$. Notez que $\operatorname{otp}(N \cap \lambda) = \omega_1$, $|N \cap \omega_1| = \aleph_0$ et $p, \mathbb{Q}, c \in N$. Soit $\delta = N \cap \omega_1$, qui est un ordinal dénombrable. Soit $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \restriction N$. En appliquant à $\mathbb{R}$ l'argument pour le λ-cc de $\mathbb{Q}$ on conclut que $\mathbb{R}$ est $\aleph_1$-cc.

Soit $G \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble générique qui intersecte tout sous-ensemble dense D de $\mathbb{Q}$ qui satisfait $D \in N$. L'existence de G est basée sur l'hypothèse que l'axiome de Martin est valable dans le modèle fondamental, et sur le fait que la collection d'ensembles denses jouit de la propriété d'intersection finie. Soit $q \in \mathbb{Q}$ une borne supérieure de G. Choisissez un V-générique $H \subseteq \mathbb{Q}$ tel que $q \in H$.

On définit une fonction $d : N \cap \lambda \rightarrow \omega$ par $d(\alpha) = c(\alpha, \delta)$. Puisque $\Vdash_{\mathbb{Q}} \omega_1^V = \omega_1$ et puisque $U \subseteq N \cap \lambda, |U| = \aleph_1$ il existe un entier naturel $m \in \omega$ dans $V[H]$ tel que $W = \{\alpha \in U : d(\alpha) = m\} \in [U]^{\aleph_1}$. Pour $\{\alpha_0, \alpha_1\} \subseteq W$ soit $A_{\alpha_0\alpha_1} = \{\zeta \in \omega_1 : c(\alpha_0, \zeta) = c(\alpha_1, \zeta) = m\}$. Notez que $|A_{\alpha_0\alpha_1}| = \aleph_1$ chaque fois que $\{\alpha_0, \alpha_1\} \subseteq W$. Pour voir cela, supposons que $\{\alpha_0, \alpha_1\} \subseteq W$ et $\underset{\sim}{\zeta}$ est un $\mathbb{Q}$-nom pour $\sup(\underset{\sim}{A}_{\alpha_0\alpha_1})$. Notez que $\underset{\sim}{\zeta} \in N$ (il est définissable dans N) et donc $\underset{\sim}{\zeta}[H] \in N$. Par la définition de W et d nous voyons que $\delta \in \underset{\sim}{A}_{\alpha_0\alpha_1}$, donc nécessairement $\underset{\sim}{\zeta}[H] = \omega_1$ et donc $A_{\alpha_0\alpha_1} = \underset{\sim}{A}_{\alpha_0\alpha_1}[H]$ est de taille $\aleph_1$. Cela signifie que $c \restriction (\{\alpha_0, \alpha_1\} \times A_{\alpha_0\alpha_1})$ est constamment m, donc la preuve est accomplie.

$\square_{1.1}$

On conclut du théorème ci-dessus que l'argument d'intensification de Baumgartner s'effondre à $\aleph_0$. Observons que le point de rupture correspond au domaine de la coloration. Donc, si $\kappa \geq 2^\omega$ alors $\binom{\kappa^{++}}{\kappa^+} \rightarrow \binom{2}{\kappa^+}_\omega$ implique $\binom{\kappa^{++}}{\kappa^+} \rightarrow \binom{\aleph_0}{\kappa^+}_\omega$. Néanmoins, pour les cardinaux successeurs, le point de rupture est strictement inférieur à la petite composante de la relation polarisée.

Montrons que si κ est fortement inaccessible alors l'argument d'intensification monte jusqu'à κ.

Théorème 1.2. *Si κ est fortement inaccessible et $\binom{\kappa^+}{\kappa} \rightarrow \binom{2}{\kappa}_{<\kappa}$ alors $\binom{\kappa^+}{\kappa} \rightarrow \binom{\gamma}{\kappa}_{<\kappa}$ pour tout $\gamma \in \kappa$.*

Démonstration.
Supposons que $\gamma \in \kappa$ et $\binom{\kappa^+}{\kappa} \nrightarrow \binom{\gamma}{\kappa}_{<\kappa}$. Soit χ tel que $\binom{\kappa^+}{\kappa} \nrightarrow \binom{\gamma}{\kappa}_{\chi}$. Par monotonie on peut supposer que $\chi = |\gamma|^+$. Notre objectif est de prouver que $\binom{\kappa^+}{\kappa} \nrightarrow \binom{2}{\kappa}_{\chi}$, prouvant ainsi notre affirmation.

Soit $f : \kappa^+ \times \kappa \rightarrow \chi$ un témoin de la relation négative $\binom{\kappa^+}{\kappa} \nrightarrow \binom{\gamma}{\kappa}_{\chi}$. Pour tout $\xi \in \kappa^+$ soit $f_\xi = f \upharpoonright \{\xi\} \times \kappa$, donc $f_\xi \in {}^{\kappa}\chi$. Supposons que $x \in [\kappa^+]^{\gamma}$. Soit $\tau = \tau(x) \in \kappa$ le premier ordinal pour lequel $|\{f_\xi(\beta) : \xi \in x\}| \geq 2$ dès que $\beta \in [\tau, \kappa)$. Un tel ordinal existe puisque f est témoin de $\binom{\kappa^+}{\kappa} \nrightarrow \binom{\gamma}{\kappa}_{\chi}$.

Pour tout $\xi \in \kappa^+$ soit $h_\xi : \kappa \rightarrow \xi$ une fonction surjective. Par récurrence sur $\xi \in \kappa^+$ nous aimerions définir $g_\xi : \kappa \rightarrow \chi \times \chi$. Fixez $\xi \in \kappa^+$ et supposons que g_η est déjà défini pour tout $\eta < \xi$. Nous supposerons, en outre, que chaque $g_\eta(\zeta)$ est un couple de la forme $(f_\eta(\zeta), j)$ pour un certain $j \in \chi$. Définissez :

$$C_\xi = \{\alpha \in \kappa : \forall x \in [h''_\xi \alpha]^{\gamma}, \tau(x \cup \{\xi\}) < \alpha\}.$$

Clairement, C_ξ est un club de κ. Pour tout $\alpha \in \kappa$ soit $\delta(\alpha) = \sup(C_\xi \cap \alpha)$, donc $\delta(\alpha) \leq \alpha$ et $\delta(\alpha) \in C_\xi$. Pour tout $\alpha \in \kappa$ définissez :

$$y_\alpha = \{\eta \in h''_\xi \delta(\alpha) : f_\eta(\alpha) = f_\xi(\alpha)\}.$$

Notez que $|y_\alpha| \leq |\gamma| < \chi$.

Choisissez $j \in \chi$ de sorte que $\eta \in y_\alpha \Rightarrow j \neq j_\eta$, en stipulant $g_\eta(\alpha) = (f_\eta(\alpha), j_\eta)$, et soit $g_\xi(\alpha) = (f_\xi(\alpha), j)$. Ceci définit une fonction $g_\xi : \kappa \rightarrow \chi \times \chi$. Définissez $g : \kappa^+ \times \kappa \rightarrow \chi \times \chi$ par $g(\xi, \alpha) = g_\xi(\alpha)$.

Supposons que $\eta < \xi < \kappa^+$. Choisissez $\delta \in C_\xi - (\eta + 1)$. Pour tout $\alpha \geq \delta$ on a $g_\xi(\alpha) = g(\xi, \alpha) \neq g(\eta, \alpha) = g_\eta(\alpha)$, soit parce que $f_\xi(\alpha) \neq f_\eta(\alpha)$ soit parce que $j^\alpha_\xi \neq j^\alpha_\eta$. Ceci implique que $\binom{\kappa^+}{\kappa} \nrightarrow \binom{2}{\kappa}_{\chi}$, comme requis.

$\square_{1.2}$

La question suivante semble être ouvert :

Question 1.1. Est-il consistant que κ soit un cardinal fortement inaccessible et $\binom{\kappa^+}{\kappa} \nrightarrow \binom{2}{\kappa}_{<\kappa}$?

Si κ est faiblement compact alors il est facile de voir que $\binom{\kappa^+}{\kappa} \rightarrow \binom{2}{\kappa}_{<\kappa}$, et donc $\binom{\kappa^+}{\kappa} \rightarrow \binom{\gamma}{\kappa}_{<\kappa}$ pour tout $\gamma \in \kappa$. Cependant, si l'on requiert un ensemble stationnaire dans la petite composante, alors un résultat négatif peut être forcé sur des cardinaux faiblement compacts.

Hajnal a prouvé dans [Haj70] que si κ est mesurable alors $\binom{\kappa^+}{\kappa} \rightarrow \binom{\kappa}{\kappa}_{<\kappa}$, et une modification donne le résultat de la relation $\binom{\kappa^+}{\kappa} \rightarrow \binom{\tau}{\kappa}_{<\kappa}$ pour tout

$\tau \in \kappa^+$. Ce résultat a réapparu dans un article de Chudnovskii qui a affirmé qu'il était également valable pour tout cardinal faiblement compact. Mais il n'a pas fourni l'argument, et nous ne savons toujours pas si cette déclaration est vraie ou non. Les meilleurs résultats sont $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\kappa^n}{\kappa}_{<\kappa}$ pour tout $n \in \omega$ et $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\tau}{\kappa}_m$ pour tout $\tau \in \kappa^+, m \in \omega$, prouvé par Jones dans [Jon06]. Ce dernier est une amélioration par rapport à un résultat de Wolfsdorf dans [Wol80].

Le premier problème ouvert, voir [HL10, Question 8.3], est donc de savoir si $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\kappa^\omega}{\kappa}_\omega$ est valable pour tout cardinal faiblement compact. Une autre façon de formuler cette question est de se demander si l'on peut distinguer la mesurabilité et la faible compacité sur la base de la relation polarisée. Il s'avère que la réponse est positive.

Disons que $\binom{\lambda}{\kappa} \to \binom{\tau}{stat}_\chi$ si pour tout $c : \lambda \times \kappa \to \chi$ on peut trouver $A \subseteq \lambda, \mathrm{otp}(A) = \tau$ et un ensemble stationnaire $B \subseteq \kappa$ tel que $c \upharpoonright (A \times B)$ est constant. Des expressions similaires doivent être interprétées en conséquence, par exemple si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre sur κ alors la relation $\binom{\lambda}{\kappa} \to \binom{\tau}{\mathscr{U}}_\chi$ signifie que la petite composante $B \subseteq \kappa$ satisfait $B \in \mathscr{U}$. Kanamori a prouvé dans [Kan78] que si κ est un cardinal mesurable et $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre normal sur κ alors $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\tau}{\mathscr{U}}_{<\kappa}$ pour tout $\tau \in \kappa^+$. Puisque $\mathscr{U}$ est normal, cela signigie que $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\tau}{stat}_{<\kappa}$ pour tout $\tau \in \kappa^+$.

D'autre part, on peut forcer l'existence d'une coloration $c : \kappa^+ \times S \to \omega$, où κ est faiblement compact et $S \subseteq \kappa$ est stationnaire, tel qu'il n'y a pas de produit monochromatique $A \times T$ où $A \subseteq \kappa^+, \mathrm{otp}(A) = \kappa$ et T est un sous-ensemble stationnaire de S. Cette déclaration apparaît dans [BGS23], et une idée essentielle dans la preuve est le concept des arbres Kurepa minces.

Le résultat positif de Jones pour les cardinaux faiblement compacts, à savoir $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\kappa^n}{\kappa}_{<\kappa}$ pour tout $n \in \omega$, est limité essentiellement par le paradoxe de Milner-Rado, voir [MR65]. Par conséquent, une tentative raisonnable pour obtenir $\binom{\kappa^+}{\kappa} \nrightarrow \binom{\kappa^\omega}{\kappa}_\omega$ serait basé sur la décomposition de κ^ω selon ce paradoxe. Mais il faut employer un principe combinatoire qui est (de manière cohérente) valable pour les cardinaux faiblement compacts et qui échoue pour les cardinaux mesurables. Les arbres Kurepa minces sont des candidats viables.

Rappleons que κ est un cardinal ineffable si pour toute coloration $c : [\kappa]^2 \to 2$ on peut trouver un ensemble stationnaire $S \subseteq \kappa$ tel que $c \upharpoonright [S]^2$ est constant. Si κ est mesurable alors κ est ineffable, et si κ est ineffable alors κ est faiblement compact. Observons que des cardinaux ineffables ne portent pas d'arbres Kurepa minces, donc la question suivante est naturelle :

Question 1.2. Est-ce que la relation $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\tau}{\kappa}_{<\kappa}$ pour tout $\tau \in \kappa^+$ est valable chaque fois que κ est un cardinal ineffable ?

Références

[Ari83] Aristotle. *Physics, Books III-IV*. Clarendon Aristotle Series, Oxford University Press, 1983. Translated by Hussey, Edward.

[Bau89] James E. Baumgartner. Polarized partition relations and almost-disjoint functions. In *Logic, methodology and philosophy of science, VIII (Moscow, 1987)*, volume 126 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 213–222. North-Holland, Amsterdam, 1989.

[BGS23] Tom Benhamou, Shimon Garti, and Saharon Shelah. Kurepa trees and the failure of the Galvin property. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 151(3) :1301–1309, 2023.

[DL89] Hans-Dieter Donder and Jean-Pierre Levinski. Some principles related to Chang's conjecture. *Ann. Pure Appl. Logic*, 45(1) :39–101, 1989.

[EHMR84] Paul Erdős, András Hajnal, Attila Máté, and Richard Rado. *Combinatorial set theory : partition relations for cardinals*, volume 106 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.

[EHR65] P. Erdős, A. Hajnal, and R. Rado. Partition relations for cardinal numbers. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 16 :93–196, 1965.

[Gar20] Shimon Garti. Polarized relations at singulars over successors. *Discrete Math.*, 343(9) :111961, 9, 2020.

[Haj70] A. Hajnal. On some combinatorial problems involving large cardinals. *Fund. Math.*, 69 :39–53, 1970.

[HL10] András Hajnal and Jean A. Larson. Partition relations. In *Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3*, pages 129–213. Springer, Dordrecht, 2010.

[Jec78] Thomas Jech. *Set theory*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.

[Jon06] Albin L. Jones. A polarized partition relation for weakly compact cardinals using elementary substructures. *J. Symbolic Logic*, 71(4) :1342–1352, 2006.

[Kan78] A. Kanamori. Some combinatorics involving ultrafilters. *Fund. Math.*, 100(2) :145–155, 1978.

[MR65] E. C. Milner and R. Rado. The pigeon-hole principle for ordinal numbers. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 15 :750–768, 1965.

[Sil71] Jack H. Silver. Some applications of model theory in set theory. *Ann. Math. Logic*, 3(1) :45–110, 1971.

[Wil77] Neil H. Williams. *Combinatorial set theory*, volume 91 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977.

[Wol80] Kurt Wolfsdorf. Der Beweis eines Satzes von G. Choodnovsky. *Arch. Math. Logik Grundlag.*, 20(3-4) :161–171, 1980.

[Zha20] Jing Zhang. Rado's conjecture and its Baire version. *J. Math. Log.*, 20(1) :1950015, 35, 2020.

Institut de Mathématiques Einstein, Université Hébraïque de Jérusalem, Jérusalem 91904, Israel

Email address: shimon.garty@mail.huji.ac.il

Institut de Mathématiques Einstein, Université Hébraïque de Jérusalem, Jérusalem 91904, Israel et Département de Mathématiques Rutgers University New Brunswick, NJ 08854, USA

Email address: shelah@math.huji.ac.il

URL: http://www.math.rutgers.edu/~shelah