קטגוריות של מחלקות מודלים

חיבור לשם קבלת התואר "דוקטור לפילוסופיה"

מאת

שהרן שלח

הוגש לסינט של האוניברסיטה העברית
ירושלים, ~~סיון~~ תמוז תשכ"ט

עבודה זו נעשתה בהדרכתו
של פרופסור מיכאל רבין

אני מודה למדריכי

פרופסור מיכאל רבין

על הדרכתו המסורה

תוכן העניינים

מבוא

המושג המרכזי בחבורנו הוא המושג "פשטות של תורה". לא נגדיר מושג זה באופן מדויק אלא נקרב אותו באופן אינטואיטיבי אל הקורא ע"י הבאת מספר דוגמאות של תורות שאנו רואים אותן כפשוטות. אנו נראה, למשל, תורות שמספר המודלים שלהן מוגבל כפשוטות. תורות כאלה הן לדוגמה: תורות שיש להן מודל יחיד עד כדי איזומורפיזם בעוצמה מסוימת (היינו קטגוריות בעוצמה), תורות שיש להן מודלים הומוגניים בלבד בעוצמה מסוימת, תורות בעלות פרדיקט Q שיש להן מודל יחיד עד כדי איזומורפיזם כשעוצמת המודל מסוימת, ועוצמת היחס המתאים לפרדיקט מסוימת, וכיוצא בזה.

דוגמה נוספת לתורות פשוטות הן תורות טרנסדנטליות לחלוטין.

Morley הגדיר ב[9] טרנסדנטליות לחלוטין של תורה מניה באופן הבא: תורה מניה היא טרנסדנטלית לחלוטין אם לכל קבוצה מניה המוכלת במודל של התורה, קיימים לא יותר מ $\aleph_0$ טפוסים שלמים מעל הקבוצה. הוא הראה שתורות טרנסדנטליות לחלוטין הן פשוטות למדי. תורות כאלו מקימות, בין השאר, את התכונות הבאות: מספר הטפוסים השלמים הקימים מעל קבוצה אינסופית החלקית למודל של תורה כזו אינו גדול מעוצמת הקבוצה; מעל כל קבוצה אינסופית A, שעוצמתה קטנה מעוצמת המודל, יש קבוצה בלתי מובחנת שיש בה יותר אברים מאשר ב A; מעל כל קבוצה המוקפת ע"י מודל של התורה יש מודל ראשוני. נוסף לזאת הראה Morley שכל תורה מניה הקטגורית בעוצמה בלתי מניה היא טרנסדנטלית לחלוטין, ובעזרת התכונות הנ"ל של תורות טרנסדנטליות לחלוטין הוא הראה שכל תורה כזו היא קטגורית בכל עוצמה בלתי מניה.

תהי A קבוצה חלקית של מודל של תורה T. נסמן ב$S^T(A)$ את קבוצת הטפוסים השלמים מעל A. הוכחנו כי כל תורה T מקימת בדיוק אחד מהתנאים הבאים:

1) לכל קבוצה A כנ"ל $|S^T(A)| \leq |A| + 2^{|T|}$

2) לכל קבוצה A כנ"ל $|S^T(A)| \leq |A|^{|T|}$ ולכל עוצמה אינסופית λ יש קבוצה A בעוצמה λ כך ש $|S^T(A)| \geq \lambda^{\aleph_0}$

3) לכל עוצמה אינסופית λ יש קבוצה A בעוצמה λ כך ש $|S^T(A)| > |A|$

באופן כזה חלקנו את אוסף כל התורות לשלוש מחלקות זרות. חלוקה זו תשמש לנו כקנה מדה לפשטות של תורה; התורות המקימות את תנאי 1 הן הפשוטות ביותר, ואלו המקימות את תנאי 3 הן המסובכות ביותר. הרעיון המונח מאחורי דרוג זה הוא שככל שעוצמת $S^T(A)$ ביחס לעוצמת A קטנה יותר כן התורה פשוטה יותר. תורה המקימת את תנאי 1 או 2 תקרא תורה יציבה, ותורה המקימת את תנאי 1 תקרא תורה על יציבה. קל לראות כי תורה טרנסדנטלית לחלוטין היא על יציבה. מתברר איפה שהתורות הטרנסדנטליות לחלוטין הן מהתורות הפשוטות לפי דרוגנו.

כל זה נעשה בפרק הראשון. בפרק השני ניסינו להכליל משפטים של Morley על תורות טרנסדנטליות לחלוטין לתורות יציבות. Morley הגדיר לתורות טרנסדנטליות דרגה של טפוס, כך שהדרגות סדורות היטב, בעוד שאנו הצלחנו להגדיר לתורות יציבות דרגה של טפוס, ולסדר את הדרגות כך שאין סדרה יורדת ארוכה מדי של דרגות, וגם רוב התכונות האחרות של דרגות נשמרו. בתוספת כמה הגבלות טבעיות, המשפט על קיום קבוצות בלתי מובחנות מעל קבוצות שעוצמתן קטנה מעוצמת המודל לתורות טרנסדנטליות לחלוטין, נכון גם לתורות יציבות. לעומת זאת יש מודל ראשוני מעל קבוצה המוקפת ע"י מודל של תורה יציבה, רק בין המודלים שהם די רוויים.

מתקבלה על הדעת הטענה הלא מחמטית שכל תורה הנראית מבחינה אינטואיטבית כפשוטה היא יציבה. נביא רשימת עובדות שמחזקות זאת:

1)כל תורה, לאו דוקא מניה הקטגורית בעוצמה הגדולה מעוצמתה, היא יציבה.

2)כל תורה שהיא קטגורית בעוצמה λ היא על יציבה אם $\lambda^{\aleph_0}=\lambda$

3)כל תורה שמספר ספוסי האיזומורפיזם של מודליה ב $\aleph_\alpha$ אינו שואף לאינסוף כש $\aleph_\alpha$ שואף, היא על יציבה.

4)כל תורה שיש לה מודלים הומוגניים בלבד בעוצמה שאינה קטנה מעוצמתה, היא על יציבה.

5)נאמר שתורה T עם פרדיקט חד-מקומי Q קטגורית בזוג המונים $\langle\lambda,\mu\rangle$ אם יש לה מודל יחיד עד כדי איזומורפיזם בעוצמה λ, בו יש μ איברים ביחס המתאים ל Q. מתברר ש"לרוב" הזוגות $\langle\lambda,\mu\rangle$ אם T קטגורית בזוג $\langle\lambda,\mu\rangle$ אז T חייבת להיות על יציבה.

בפרק השלישי מוכנס הסימון $PC(T_1,T)$ בעבור תורות T_1, T המקיימות $T_1 \supset T$. $PC(T_1,T)$ הוגדרה כמחלקת צמצומי מודלי T_1 לשפת T. התברר שאם מחלקה כזאת קטגורית בעוצמה $\lambda > |T_1|$ אז T יציבה, ויתר על כן היא על יציבה, חוץ, אולי מבעבור λ אחד. במקרה ש T אינה יציבה (על יציבה) נתן חסם תחתון למספר המרבי של מודלים לא איזומורפיים במחלקה, בעוצמה מסוימת, כפונקציה של העוצמה, כך שהחסם שואף לאינסוף יחד עם העוצמה. כן מוכח שהבעיה "אם $PC(T_1,T)$ קטגורית (יש לה מודלים הומוגניים בלבד) בעוצמה $\lambda > |T_1|$ האם $PC(T_1,T)$ קטגורית (יש לה מודלים הומוגניים בלבד) בעוצמה נוספת $\mu > |T_1|$ נתנת להעמדה על הבעיה "אם לתורה T_2, $|T_2| \geq |T_1| + \aleph_0$ יש מודל M המשמיט טפוס p בעוצמה λ, כך שמספר האברים ביחס המתאים לפרדיקט Q קטן מ μ, האם יש ל T_2 מודל בעוצמה μ המשמיט את p כך שמספר האברים ביחס המתאים ל Q קטן מ μ?". העמדה זו בתוספת משפט שפותר מקרה פרטי של הבעיה השניה, מוכיחה שאם $PC(T_1,T)$ קטגורית בעוצמה הגדולה מ $|T_1|$ ושונה מ $\aleph(|T_1|)$ אז $PC(T_1,T)$ קטגוריה בעוצמות הגדולות כרצוננו. בעזרת משפטים אלה, וכן בעזרת המשפטים מפרק 2, מתברר שאם תורה T קטגורית בעוצמה הגדולה מ $|T|$ ושונה מ $\aleph(|T|)$ אז היא קטגורית מעוצמה מסוימת ואילך, אינה קטגורית בעוצמות קטנות יותר הגדולות מ $|T|$, והנקודה הקריטית חסומה $(\mu(|T|)\rhd)$. $(\aleph(\lambda)=\inf\{\mu : \mu^{\aleph_0} > \mu+\lambda\})$

בפרקים 2 ו־3 הופיע לעיתים קרובות המושג "בין המודלים הרוויים ב λ". ידוע שרוויה λ-ית היא מקרה פרטי של הומוגניות λ-ית. באופן טבעי מתעוררת השאלה האם אפשר להכליל כמה מהמשפטים בפרקים הנ"ל למודלים הומוגניים. טפלנו בבעיות כאלה בפרק הרביעי. ראשית התעוררה השאלה שהיא מידית בעבור המושג רויה - האם לדיאגרמה נתונה D יש מודל הומוגני ב־ λ שדיאגרמתו הסופית (קבוצת הטפוסים השלמים המתגשמים בו) היא D. מתברר שאם לתורה יציבה T יש מודל ההומוגני ב־$(2^{|T|})^+$, אז יש לה מודל הומוגני ב־λ לכל λ, ונוסף לזאת מעל כל קבוצה המוקפת ע"י מודל בעל דיאגרמה D, יש מודל ראשוני בין המודלים ההומוגניים ב־$|T|^+$. כמו כן נתברר שאם ל T יש מודלים הומוגניים בלבד בעוצמה מסוימת $>|T|$, אז מעוצמה מסוימת ואילך יש לה מודלים הומוגניים בלבד, ובעוצמות הקטנות מהעוצמה הנ"ל וגדולות מ $|T|^+$, יש לה מודלים לא הומוגניים.

בפרק החמישי נטפל בקטגוריות של תורה שלמה $\bar{T}$ בשפה $L(Q_{eq})$ (השפה בהוספת הכמת יש כעוצמת המודל אברים). מתברר שאם $\bar{T}$ קטגורית בעוצמה $>(2^{|\bar{T}|})^+$ אז לרוב העוצמות $\bar{T}$ היא על יציבה והכמת הוא למעשה טריביאלי, זאת אומרת, מספר האברים שיקיימו נוסחה מסוימת במודל של $\bar{T}$ הוא סופי או כעוצמת המודל. אם $|\bar{T}|<2^{\aleph_0}$ אז יוצא ש $\bar{T}$ קטגורית בכל עוצמה $>|\bar{T}|$ אך אם $|\bar{T}|\geq 2^{\aleph_0}$ המצב פחות ברור.

בפרק השישי טפלנו בקטגוריות של תורות בשני מובנים. הגדרנו תורה T קטגורית ב $\langle\mu,\lambda\rangle$ אם יש לה מודל אחד ויחיד עד כדי איזומורפיזם, בו עוצמת המודל היא λ ועוצמת המודל המתאים לפרדיקט מסוים היא μ ושאלנו האם T קטגורית בעוד זוגות. מתברר שאם μ,λ מקיימים תנאים די חלשים, אז T היא על יציבה, $\bar{T}$ קטגורית בכל זוג $\langle\mu,\lambda\rangle$ בו μ גדול למדי, ו λ גדול למדי ביחס ל μ.

אחרי שהוכחתי את המשפטים המובאים כאן, נתברר כי עסקו לפני בקטגוריות של תורות לא מניות. Rowbottom ([13]) עסק בנושא זה תחילה, אך לא פרסם את עבודתו. אח"כ באופן בלתי תלוי, עסק בו Ressayre ([12]) וקבל תוצאות חזקות קצת יותר. הוא הוכיח מסקנה חלשה מתוצאות פרק 1: אם T אינה יציבה ב λ, $\lambda>\mu$, $\mu^{\aleph_0}>\mu$ אז T אינה יציבה ב μ. כן הוא הוכיח משפט הדומה לאחד משני המקרים של משפט 2.9 (על קיום מודלים ראשוניים) וכן משפט חלש במקצת מ 3.8 - זה משפט העוסק בקטגוריות של תורות לא מניות.)

בעבודה זו נתנו פתרונות חלקיים לכמה בעיות הוצגו בספרות המתמטית;

משפט 3.8 נותן תשובה חלקית לשאלה של Morley [9]

משפט 3.7 העוסק במחלקות פסאודו אלמנטריות הקטגוריות בעוצמה כלשהיא או שיש להן מודלים הומוגניים בלבד בעוצמה כלשהיא, נותן תשובה חלקית לבעיה שהציג Keisler ב [6] גם משפט 4.11 הדן בתורות שיש להן מודלים הומוגניים בלבד בעוצמה כלשהיא, עונה חלקית על בעיה של Keisler, [6].

סימונים

נניח ידיעה בסיסית בתורת המודלים ובתורת הקבוצות. $\alpha,\beta,\gamma,i,j,k,\ell$ יסמנו סודרים O(אורדינליים), δ – יסמן סודר גבולי, ו n,m יסמנו מספרים טבעיים. $\varkappa,\lambda,\mu,\chi$ יסמנו מונים (קרדינליים). $\beth(\lambda,\alpha)$ יוגדר באינדוקציה על סופית: $\beth(\lambda,0)=\lambda$, $\beth(\lambda,\alpha+1)=2^{\beth(\lambda,\alpha)}$ ו $\beth(\lambda,\delta)=\bigcup_{\alpha<\delta}\beth(\lambda,\alpha)$. λ^+ יהיה העוקב של λ, כלומר המונה הראשון הגדול מ λ. $\alpha\times\beta$ יהיה המכפלה של α ב β כסודרים. $\aleph_\alpha$ יהיה המונה האינסופי הα-י. λ יקרא מונה סדיר (רגולרי) אם אין $\lambda>\lambda_i$ $\Sigma\{\lambda_i: i<\lambda_0\}=\lambda$. אם λ איננו סדיר הוא יקרא סינגולרי. מונה שאיננו עוקב של מונה אחר הוא מונה גבולי. עוצמה של קבוצה A תהיה $|A|$. נסמן $\chi(\lambda)=\inf\{\kappa:\kappa^{\aleph_0}\geq\kappa+\lambda\}$, $\chi^{<\lambda>}=\Sigma_{\kappa<\lambda}\chi^{\kappa}$, $\beth(\alpha)=\beth_\alpha=\beth(\aleph_0,\alpha)$. סדרה $\bar{a}$ היא פונקציה מסודר, שיקרא אורך הסדרה ויסמן ב $\ell(\bar{a})$. האיבר ה i-י בסדרה הוא $\bar{a}(i)=\bar{a}_i$. סימון זה עלול, כביכול, לגרום בלבול שכן $\bar{a}_i$ יכולה להיות סדרה ואברה ה j-י יהיה $(\bar{a}_i)_j$. אך למעשה בכל מקום יהיה ברור מה הכוונה. סדרה היא סופית אם $\ell(\bar{a})<\omega$. הסדרה $\bar{a}$ תסמן ותוגדר גם כ $\langle\bar{a}_0,\dots,a_i,\dots\rangle_{i<\ell(\bar{a})}$. $\langle\,\rangle$ תסמן את הסדרה הריקה. אם g,h סדרות אז נגדיר את $g^\frown h$ כך:

$\ell(g^\frown h)=\ell(g)+\ell(h)$ ו $(g^\frown h)_i=g_i$ ל $\ell(g)>i$,

ו $(g^\frown h)_{\ell(h)+i}=h_i$ ל $\ell(h)>i$. לא נבדיל בין ו

L תסמן שפה מסדר ראשון עם סמן השיוויון. T תסמן תורה מסדר ראשון בשפה $L=L(T)$. כשלא נסמן את התורה הכוונה היא שזו T. אם לא יצויין אחרת נניח ש T היא שלמה, ולכל נוסחה $\psi(x_1,\dots)$ יש פרדיקט R כך ש $(\forall x_1)\dots[\psi(x_1,\dots)\equiv R(x_1,\dots)]\in T$ ושאין פונקציות בשפה. לכן לעיתים לא יהיה טעם בהבחנה בין פרדיקט ונוסחה. הנחה זו איננה מגבילה את תוקף משפטינו (ראה[9] Morley). פרדיקטים יסומנו ב R,P,Q. P,Q יסמנו בדרך כלל פרדיקטים חד-מקומיים. נוסחות תסומנה ב ψ,φ. כשנכתוב $\psi(x_0,\dots)$ נרמוז בזה שכל המשתנים החופשיים של ψ נמצאים ב $\{x_0,\dots\}$. כשנכתוב $R(\bar{x})$ או $R[\bar{a}]$ נניח שיש התאמה בין אורך $\bar{x}$ ($\bar{a}$) ובין מספר המשתנים ב R. מודלים יסומנו ב M,N, ואם a הוא אבר במודל M, נכתוב זאת בצורה הלא מדויקת $a\in M$. $M\models\psi[a_0,\dots]$ פרושו ש $\psi[a_0,\dots]$ נכון ב M. כשברור מהו M או כשאין זה משנה לא נסמנו. $|M|$ תסמן את קבוצת אברי M ולכן $\|M\|$ תהיה עוצמת המודל. נגדיר $\psi(M)=\{\bar{a}: M\models\psi[\bar{a}]\}$; $\psi(M,\bar{a})=\{\bar{b}: M\models\psi[\bar{b}\bar{a}]\}$. x,y,z יסמנו משתנים פרטיים.

$\bar x, \bar y, \bar z$ - סדרות סופיות של משתנים פרטיים, a, b, c - אברים ממודלים.
$\bar a, \bar b, \bar c$ - סדרות סופיות של אברים ממודלים. אם לכל $\ell(\bar a) > i$, $a_i \in A$
אז נאמר ש $\bar a$ היא סדרה ב A או מ A או $\bar a \in A$. A, B, C תסמנה קבוצות
המוקפות ע"י מודלים של T. למעשה אם $M \supset A$ תסמן A גם מבנה ז.א. אם $\bar a$
סדרה מ A אז נאמר ש $\psi[\bar a]$ אם $M \models \psi[\bar a]$; ו $A \subset M_1$ רק אם כל אבר ב A
הוא אבר של M_1 ולכל סדרה $\bar a$ מ A, $M_1 \models \psi[\bar a] \Leftrightarrow \psi[\bar a]$. אם A, B מבנים, אז
$A \cup B$ יהיה מבנה, כשברור שיש מודל מסוים M של T כך ש $A, B \subset M$.
$T(A)$ תסמן את $T \cup \{\psi[\bar a] : \bar a \in A, \psi[\bar a]\}$. גם ל $|M|$ נתיחס כמבנה.

נשתמש באופן חופשי במשפט הדחיסות (קומפקטיות): אם Γ קבוצת נוסחות שלכל תת קבוצה סופית שלה יש מודל, אז ל Γ יש מודל.

p יהיה טפוס n-י מעל מבנה A אם p הוא קבוצה של נוסחות מהצורה $\psi(\bar x, \bar a)$ כש $\bar a$ סדרה מ A ו $\bar x = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$, ו $T \cup p$ חסרת סתירה. אם $A \subset M$, $\bar b$ סדרה מ M, p טפוס מעל A אז $\bar b$ מגשים את p אם $\psi(x, \bar a) \in p \Rightarrow \psi[\bar b, \bar a]$. אם איננו מוגשם אז הוא מושמט. אם n אינו מצוין נניח ש $n=0$, $x = x_0$. אם A אינו מצוין אז נניח שזהו המבנה הריק. אם לכל $\varphi = \psi(x_0, \dots, \bar a)$, $\bar a \in A$; $\varphi \notin p \Rightarrow \neg\varphi \in p$ אז p הוא טפוס שלם מעל A. נגדיר $p|A = \{\psi(\bar x, \bar a) \in p : \bar a \in A\}$. גם האותיות q, r תסמנה טפוסים. $S^T(A)$ תהיה קבוצת הטפוסים השלמים מעל A. כשהכוונה היא לתורה T נכתוב $S(A)$. אם I היא קבוצה של נוסחות מ L, אז $p|I = \{\psi(x, \bar a) \in p : \psi \in I\}$

$$S_I(A) = \{p|I : p \in S(A)\}, \quad p|\psi = p|\{\neg\psi, \psi\}, \quad S_\psi(A) = S_{\{\neg\psi, \psi\}}(A).$$

העתקה F ממבנה B לתוך מבנה A תקרא אלמנטרית אם לכל סדרה $\bar a$, $\bar a \in B$ ופרדיקט R, $R[\bar a]$ אםם (אם ורק אם) $R[F(a_1), F(a_2), \dots]$. העתקה כזו תקרא גם שכון אלמנטרי. אם $|M| \subset |M_1|$ אז M_1 הוא הרחבה אלמנטרית של M אם העתקת הזהות F שתחומה $|M|$ היא העתקה אלמנטרית. שרשרת אלמנטרית היא סדרה $\langle M_i : i < \alpha \rangle$ כך שאם $j < i$ M_i הוא הרחבה אלמנטרית של M_j.

מודל M הוא רווי λ אם כל טפוס מעל $|M|$ שעוצמתו $< \lambda$ מתגשם ב M. מודל M יקרא הומוגני ב λ אם לכל $\alpha < \lambda$ ולכל $\{a_i : i < \alpha\}, \{b_i : i < \alpha\} \subset |M|$ כך שההעתקה F, $(\forall i < \alpha) F(a_i) = b_i$ היא העתקה אלמנטרית ולכל $a_\alpha \in M$ אפשר למצא $b_\alpha \in M$ שההעתקה F', $(\forall i \le \alpha) F(a_i) = b_i$ היא העתקה אלמנטרית. (ר' 4. מופיעה הגדרה שקולה). מודל שהוא רווי (הומוגני)

ב $\|M\|$ יקרא מודל רווי (הומוגני). $\mu(\varkappa)$ הוא המונה הראשון כך שאם $|T| \le \varkappa$, T תורה לאו דוקא שלמה, ויש מודל המשמיט טפוס p בעוצמה גדולה מ λ לכל λ [illegible] אז ל T יש מודל המשמיט את p בכל עוצמה $\le |T|$. ב Vaught [20] מוזכרות התוצאות הבאות:

$\mu(\varkappa) < \beth_\gamma$ כש $\gamma = (2^{|T|})^+$; $\mu(\aleph_0) = \beth_{\omega_1}$; $\mu(\beth_\delta) = \beth_\gamma$

כש $cf\,\delta = \omega$, $\gamma = (\beth_\delta)^+$.

M^I/D יסמן על חזקה של M כש D על מסנן (אולטרה פילטר) מעל I. דיון מפורש בעל חזקות אפשר למצא ב [3].

אם M מודל של שפה L, L_1 תת שפה של L (כל פרדיקט או סימן ב L_1 נמצא ב L), אז הצמצום של M ל L_1, M_1 מוגדר כך ש M_1 מודל של L_1 ו $|M| = |M_1|$, ואם R פרדיקט $R \in L_1$ אז $R[M] = R[M_1]$

פרק 1

עוצמות אפשריות של $S(A)$

הגדרה 1.1

$K_T(T) = \sup\{|S(A)| : |A| \le \lambda\}$

בפרק זה נסווג את התורות לפי הפונקציות $K_T(\lambda)$ המתאימות להן. נוכיח שכל תורה מקיימת בדיוק אחד מהתנאים הבאים:

1) לכל λ, $K_T(\lambda) > \lambda^+$ ואז נאמר ש T היא בלתי יציבה.

2) לכל λ, $\lambda^{\aleph_0} < K_T(\lambda) \le (\lambda^{|T|})^+$ ואז נאמר ש T היא יציבה, אך לא על יציבה.

3) לכל λ, $K_T(\lambda) \le \lambda^+ + (2^{|T|})^+$ ואז נאמר ש T היא יציבה, וגם על יציבה.

סימונים 1.2

1) η, τ תסמנה סדרות של אפסים ואחדים.

2) $\eta_i = \eta(i)$ יהיה האבר ה i י בסדרה η.

3) $l(\eta)$ יהיה אורך הסדרה η.

4) $\eta|\alpha$ תוגדר כך $\langle \eta_0, \dots, \eta_i, \dots \rangle_{i<\alpha}$, ז.א. זו סדרה המורכבת מ α האברים הראשונים בסדרה η.

5) אם ψ נוסחה אז נגדיר את $\psi^{\eta(i)}$ כך: אם $\eta(i)=0$ אז $\psi^{\eta(i)} = \psi$ ואם $\eta(i)=1$ אז $\psi^{\eta(i)} = \neg\psi$

6) אם $R(x,\bar{y})$ פרדיקט ב $L(T)$ אז

$$\Gamma_R = \{(\exists x)(\bigwedge_{i<l(\eta)} R(x, \bar{y}_{\eta|i})^{\eta(i)}) : l(\eta) < \omega\} \cup T$$

$$\Gamma_{R,\varkappa} = \{R(x_\eta, \bar{y}_{\eta|i})^{\eta(i)} : l(\eta) = \varkappa,\ i < \varkappa\} \cup T$$

משפט 1.1

1) אם יש λ כך ש $K_T(\lambda) > (\lambda^{|T|})^+$ ז.א. אם קיים מבנה A כך ש $S(A) > \lambda^{|T|}$, $|A| \le \lambda$ אז יש פרדיקט R כך ש Γ_R היא חסרת סתירה.

2) אם יש פרדיקט R כך ש Γ_R חסרת סתירה, אז לכל λ, $K_T(\lambda) \ge \lambda^+$

ולכן אם $\lambda^{|T|}=\lambda$ (למשל $\lambda=2^{|T|}$) אז $K_T(\lambda)\geq(\lambda^{|T|})^+$

ב3) Γ_R יש סתירה אםם לכל מבנה אינסופי A, $|S(A)|=|A|$

<u>הוכחה</u> תחילה נוכיח שאם יש מבנה A כך ש $|S(A)|>|A|^{|T|}$ אז יש פרדיקט R כך ש $|S_R(A)|>|A|\geq\aleph_0$ אח"כ נוכיח שאם יש A כך ש $|S_R(A)|>|A|\geq\aleph_0$ אז Γ_R חסרת סתירה. אחרי זאת נראה שאם Γ_R חסרת סתירה, אז לכל מונה λ קיים מבנה A כך ש
$$|S(A)|\geq|S_R(A)|\geq\inf\{2^{\mu}:2^{\mu}>\lambda\}>\lambda\ ,\ |A|\leq\lambda$$
ובזאת תושלם ההוכחה.

נניח שיש מבנה אינסופי A כך ש $|S(A)|>|A|^{|T|}$. אם $P_1,P_2\in S(A)$ ו $P_1\neq P_2$ אז יש פרדיקט R כך ש $P_1|R\neq P_2|R$ (כי לכל נוסחה יש פרדיקט שקול) ולכן
$$|A|^{|T|}<|S(A)|\leq|\prod_R S_R(A)|=\prod_R|S_R(A)|$$
אם לכל R, $|S_R(A)|\leq|A|$ אז $|A|^{|T|}<\prod_R|S_R(A)|\leq\prod_R|A|=|A|^{|T|}$ סתירה. יוצא שיש R כך ש $|S_R(A)|>|A|\geq\aleph_0$

נניח עתה שיש R ו A כך ש $|S_R(A)|>|A|\geq\aleph_0$ ונוכיח ש Γ_R חסרת סתירה. לכל סדרה $\bar{a}$ כך ש $\bar{a}\in A$, $R(x,\bar{a})$ מחלקת את $S_R(A)$ לשתי קבוצות-קבוצת הטפוסים המכילים את $R(x,\bar{a})$ ולקבוצת הטפוסים המכילים את $\neg R(x,\bar{a})$. נראה שיש $\bar{a}$ כך ש $R(x,\bar{a})$ מחלקת את $S_R(A)$ לשתי קבוצות שעוצמתן $>|A|$. ולא, לכל $\bar{a}$ יש $\tau(\bar{a})$, $\tau(\bar{a})\in\{0,1\}$, כך שעוצמת קבוצת הטפוסים המכילים את $R(x,\bar{a})^{\tau(\bar{a})}$ אינה עולה על $|A|$.
$$|A|<|S_R(A)|=|\{p\in S_R(A):R(x,\bar{a})^{\tau(a)}\notin p, \bar{a}\text{ לכל }\}\cup\bigcup_{\bar{a}}\{p\in S_R(A):R(x,\bar{a})^{\tau(a)}\in p\}|$$
$$\leq|\{p:R(x,\bar{a})^{1-\tau(\bar{a})}\in p, \bar{a}\text{ לכל }\}|+\sum_{\bar{a}}|\{p\in S_R(A):R(x,a)^{\tau(\bar{a})}\in p\}|=$$
$$\leq 1+\sum_{\bar{a}}|A|=1+|A|\cdot|A|=|A|$$
סתירה. יוצא שקיים $\bar{a}=\bar{a}_{<>}$ שמחלק את $S_R(A)$ לשתי קבוצות שעוצמתן $>|A|$. לכל אחת מהקבוצות הנ"ל נוכל לחזור על ההוכחה הנ"ל וכך למצוא $\bar{a}_{<0>},\bar{a}_{<1>}$ כך ש
$$\text{לכל } i,j\in\{0,1\}\ ,\ |\{p\in S_R(A):\ R(x,a_{<>})^{i},\ R(x,a_{<i>})^{j}\in p\}|>|A|$$

וכך נוכל להמשיך להגדיר את $\{\bar{a}_\eta : \ell(\eta) < \omega\}$ כך שאם $\ell(\eta)<\omega$ אז

$|\{p \in S_R(A) : R(x, \bar{a}_{\eta|m})^{\eta(m)} \in p \Leftarrow \ell(\eta) > m\}| > |A|$ לכן יש ספוס p

$p \in S_R(A)$, כך ש $\ell(\eta) > i \Rightarrow R(x, \bar{a}_{\eta|i})^{\eta(i)} \in p$

יוצא כי Γ_R חסרת סתירה. קל לראות שמכאן יוצא כי $\Gamma_{R\,\varkappa}$ חסרת סתירה לכל $\varkappa$ בהסתמך על משפט הדחיסות.

נניח כי $\Gamma_{R,\varkappa}$ חסרת סתירה לכל $\varkappa$ ונוכיח כי לכל λ יש A כך ש λ^+

$$K_T(\lambda) > |S(A)| \geq |S_R(A)| \geq \inf\{2^\mu : 2^\mu > \lambda\}$$

נגדיר $\varkappa = \inf\{2^\mu : 2^\mu > \lambda\}$

כיון ש $\Gamma_{R,\varkappa}$ חסרת סתירה, יש לה מודל, M. בזוכרנו כי

$$\Gamma_{R,\varkappa} = \{R(x_\eta, \bar{y}_{\eta|i})^{\eta(i)} : i < \ell(\eta) = \varkappa\}$$

נניח כי המב שים של x_η ב M יהיה a_η, והסדרה המגשימה את $\bar{y}_{\eta|i}$ תהיה $b_{\eta|i}$ נגדיר $A = \{(\bar{b}_{\eta|i})_m : m, i, \eta\}$

כיון ש $\varkappa \leq \lambda$ קל לראות כי $|A| \leq \aleph_0 \cdot |\{\eta|i : i < \ell(\eta) = \varkappa\}| = \aleph_0 \cdot \sum_{\alpha<\varkappa} 2^{|\alpha|} = \lambda$

נסמן לכל η באורך $\varkappa$ ב p_η את הטפוס השלם ש a_η מגשים מעל A.

אם $\eta \neq \tau$ ברור ש $p_\eta|R \neq p_\tau|R$

לכן $|S_R(A)| \geq |\{p_\eta : \ell(\eta) = \varkappa\}| = 2^\varkappa > \lambda$

ומכאן יוצאת הטענה שהופיעה בתחילת הקטע.

בזה נסתימה הוכחה 1.1, לפי השלבים שפורטו בתחילת ההוכחה.

<u>הגדרה 1.3</u> אם T תורה המקיימת $K_T(\lambda) \leq (\lambda^{|T|})^+$ לכל λ אז T תקרא תורה יציבה.

<u>סימון 1.4</u> $\Gamma_\varkappa\langle R_0, \ldots, R_n, \ldots\rangle_{n<\omega} = \{R(x_g, \bar{y}^k_{g|m}) \equiv \neg R(x_{g'}, \bar{y}^k_{g'|m})$:

$g = \langle i_0, \ldots, i_{m-1}, i_m, \ldots\rangle$; $g' = \langle i_0, \ldots, i_{m-1}, i'_m, \ldots\rangle$;

$\ell(g) = \ell(g') = \omega$; $i_\ell, i'_\ell < \varkappa$ לכל ; $k = \{i_m, i'_m\}\} \cup T$

<u>משפט 1.2</u>

אם יש λ כך ש $K_T(\lambda) > \lambda^+ + (2^{|T|})^+$ כלומר יש A כך ש $|S(A)| > |A| + 2^{|T|}$

אז יש סדרה $\langle R_0, \ldots, R_n, \ldots\rangle$ כך ש $\Gamma_\omega\langle R_0, \ldots\rangle$ חסרת סתירה.

2) אם $\Gamma_\omega\langle R_0,\ldots\rangle$ חסרת סתירה אז לכל מונה λ יש מבנה A

כך ש $|A|=\lambda$, $|S(A)| \geq \lambda^{\aleph_0}$ ולכן $K_T(\lambda) \geq \lambda^{\aleph_0}$

3) אם לא לכל λ, $K_T(\lambda) \geq \lambda^{\aleph_0}$ ויש מבנה A כך ש $|S(A)| > |A| > |T|$

אז יש מבנה $A \supset B$, $|B|=|T|$ כך ש $|S(B)| > |A|$ ולכן אם $K_T(\lambda) > \lambda^+$

אז $K_T(|T|) > \lambda^+$.

<u>הוכחה</u> 1) ב.ה.כ. נניח כי $|A| \geq 2^{|T|}$ וש T יציבה, שכן אחרת

התוצאה היא מידית,

כי אם Γ_R חסרת סתירה, אז $\Gamma_\omega\langle R : n<\omega\rangle$ היא חסרת סתירה.

נגדיר כאינדוקציה את הסדרה $\langle R_0,\ldots,R_m,\ldots\rangle$

כך שיתקיים התנאי הבא:

לכל $m<\omega$ יש קבוצת טפוסים $\{p^{\ell,m}_{\langle i_0,\ldots,i_\ell\rangle} : \ell<m;\ i_0,\ldots,i_\ell<|T|^+\}$

כך ש: 1) $p^{\ell,m}_{\langle i_0,\ldots\rangle} \in S_{R_\ell}(A)$

2) אם $i_0,\ldots,j_0,\ldots<|T|^+;\ \langle i_0,\ldots\rangle \neq \langle j_0,\ldots\rangle$ אז

$$p^{\ell,m}_{\langle i_0,\ldots\rangle} \neq p^{\ell,m}_{\langle j_0,\ldots\rangle}$$

3) עוצמת קבוצת הטפוסים ב $S(A)$ שמכילים את

$p^{0,m}_{\langle i_0\rangle} \cup p^{1,m}_{\langle i_0,i_1\rangle} \cup\cdots\cup p^{m-1,m}_{\langle i_0,\ldots,i_{m-1}\rangle}$ שנסמנה ב $S(\langle i_0,\ldots,i_{m-1}\rangle)$ היא $>|A|$

וזאת לכל $i_0,\ldots,i_{m-1} < |T|^+$

בהגדרה זו אין ל $m=0$ שום יחוד, ולכן נניח שהגדרנו את

R_ℓ ל $\ell<m$ ונגדיר את R_m.

ראשית נראה שלכל $\bar{\imath}=\langle i_0,\ldots,i_{m-1}\rangle$ יש פרדיקט R כך שקיימים

q_i, $|T|^+>i$, $q_i \in S_R(A)$; כך שלכל $|T|^+>i$

$$|\{p\in S(A) : p\supseteq q_i,\ p\in S(\bar\imath)\}| > |A|$$

אם לפרדיקט R אין $|T|^+$ q_i־ים כאלה, אז יוצא ש (1) מתקיים לכל היותר

ל $|T|$ טפוסים ב $S_R(A)$ ונסמנם ב $\{q^R_i : i<i(R)\leq|T|\}$. לכן

$$|A| < |S(\bar\imath)| = |\{p\in S(\bar\imath) : (\forall R)(\exists i)\, p|R = q^R_i\} \cup \bigcup_R \{p\in S(\bar\imath) : p|R \notin \{q^R_i : i\}\}|$$

$$\leq \left|\prod_R \{q^R_i : i<i(R)\}\right| + \Sigma_R \left|\{p\in S(\bar{\imath}) : p|R \notin \{q^R_i : i<i(R)\}\}\right| \leq$$
$$\leq 2^{|T|} + \Sigma_R |S_R(A)|\,|A|$$

לפי הגדרת q^R_i

כיון ש T היא יציבה $|S_R(A)|=|A|$

$$|A|<|S(\bar{\imath})| \leq 2^{|T|} + \Sigma_R |S_R(A)|\,|A| = 2^{|T|} + |T|\,|A|\,|A| = |A|$$

סתירה, ובכך הוכחנו את הטענה שהופיעה בתחילת קטע זה. נגדיר פונקציה F מ
$\{<i_0,\dots,i_l> : l<m; i_0,\dots,i_l<|T|^+\}$ לפרדיקטים שב $L(T)$ באינדוקציה
הפוכה על l. ל- $l=m-1$, $F(<i_0,\dots,i_l>)=R$, יהיה הפרדיקט שקיומו הוכח
בקטע הקודם. ל $m-1>l$ יהיה R פרדיקט כך ש

$$\left|\{i_{l+1} : i_{l+1}<|T|^+, F(<i_0,\dots,i_l,i_{l+1}>)=R\}\right| = |T|^+$$

אילו לא היה פרדיקט כזה, אז

$$|T|^+ = \left|\{i_{l+1} : i_{l+1}<|T|^+\}\right| =$$
$$= \left|\bigcup_R \{i_{l+1} : i_{l+1}<|T|^+, F(<i_0,\dots,i_l,i_{l+1}>)=R\}\right| \leq |T|\,|T| = |T|$$

סתירה. יוצא כי F מוגדרת. נגדיר $R_m=F(<>)$. עתה קל
לראות שאפשר להגדיר את $\{P^{l,m+1}_{<i_0,\dots,i_{l-1}>} : l<m+1\}$ לפי הדרישות,
וכי הסדרה $<R_0,\dots,R_m,\dots>$ שהגדרנו מקיימת ש $\Gamma_{|T|^+}<R_0,\dots>$
חסרת סתירה, ולכן גם $\Gamma_\omega<R_0,\dots>$ חסרת סתירה.

2) נתון ש $\Gamma_\omega<R_0,\dots>$ חסרת סתירה. קל לראות שזה גורר
ש $\Gamma_\lambda<R_0,\dots>$ חסרת סתירה לכל λ ולכן יש לה מודל $M=M_\lambda$.
נניח כי המגשים של x_g יהיה a_g, המגשימה של הסדרה $\bar{y}^R_{glm}$
תהיה $\bar{b}^R_{glm}$. נגדיר

$$A=\{(\bar{b}^R_{glm})_l : l(g)=\omega, (\forall n<\omega)\, g_n<\lambda;\ R=\{g_m,i_m\}, i_m<\lambda;\ l<l(\bar{b}^R_{glm})\}$$

ו p_g יהיה הטפוס ש a_g יגשים מעל A.
קל לראות כי

$$|A| \leq \sum_{m<\omega} \aleph_0 \lambda^{m+1} = \lambda$$

מצד שני אם $g_1 \neq g_2$ אז $p_{g_1} \neq p_{g_2}$ ולכן

$$|S(A)| \geq |\{p_g : g = \langle i_0, \dots, i_m, \dots \rangle, (\forall \ell < \omega)\, i_\ell < \lambda\}| = \lambda^{\aleph_0}$$

בזה נשלמה הוכחה 2.

3) נחון שלא לכל λ $K_T(\lambda) > \lambda^{\aleph_0}$ ויש מבנה A כך ש $|S(A)| > |A| > |T|$.

לפי משפט 1.1 יוצא כי T יציבה. לפי מה שהוכחנו ב 1.2.1 ו 1.2.2 יוצא כי $|A| < 2^{|T|}$ וכי אין סדרה $\langle R_0, \dots \rangle$ כך ש $\Gamma_\omega \langle R_0, \dots \rangle$ חסרת סתירה.

אם נתבונן ב 1.2.1, יוצא שהנתון היחיד החסר כאן הוא כי $|A| \geq 2^{|T|}$ ואם נתבונן בהוכחות 1.2.1, השמוש היחיד בהנחה כי $|A| \geq 2^{|T|}$ הוא בהוכחה כי אם $S \subseteq S(A)$, $|A| < |S|$ אז יש פרדיקט R ו־$|T|^+$ ספוסים $q_i^R \in S_R(A)$, $\{q_i^R : i < |T|^+\}$ כך שלכל $i < |T|^+$ $|\{p \in S : p | R = q_i^R\}| > |A|$.

כיון שכאן הראינו כי יש סתירה ב $\Gamma_\omega \langle R_0, \dots \rangle$ לכל סדרה $\langle R_0, \dots \rangle$ יוצא שיש קבוצה $S(A) \supset S$ כך ש $|A| < |S|$, ולכל פרדיקט R אין יותר מ $|T|$ ספוסים q ב $S_R(A)$ כך ש $|\{p \in S : p | R = q\}| > |A|$ ונניח שהם $\{q_i^R : i < i(R) \leq |T|\}$

נגדיר $S_1 = \{p : (\forall R)(\exists i)\, p | R = q_i^R\}$.

$$|S - S_1| = |\{p \in S : (\exists R)(\forall i)\, p | R \neq q_i^R\}| \leq \Sigma_R |\{p \in S : (\forall i)\, p | R \neq q_i^R\}| \leq$$

לפי הגדרת $\{q_i^R : i < i(R) \leq |T|\}$

$$\leq \Sigma_R |A|\, |S_R(A)| \leq |T|\, |A|\, |A| = |A|$$

כיון ש $|S - S_1| \leq |A|$ ו־$|S| > |A|$ חייב להתקיים $|S_1| > |A|$. קל לראות שיש מבנה $A \supset B$ בעוצמה $\leq |T|$ כך שאם $i \neq j$ אז $q_i^R | B \neq q_j^R | B$ לכל R, $i, j < i(R)$. נראה שאם $p_1, p_2 \in S_1$ ו $p_1 \neq p_2$ אז $p_1 | B \neq p_2 | B$.

כיון ש $p_1 \neq p_2$ יש R כך ש $p_1 | R \neq p_2 | R$. מצד שני כי $p_1 | R, p_2 | R \in \{q_i^R : i < i(R)\}$, $p_1, p_2 \in S_1$, ולכן נניח כי $p_1 | R = q_i^R$, $p_2 | R = q_j^R$, $q_i \neq q_j$. לפי הגדרת B $q_i^R | B \neq q_j^R | B$, ולכן $(p_1 | R) | B \neq (p_2 | R) | B$

ולכן $p_1 | B \neq p_2 | B$. לכן

$$|S(B)| \geq |\{p | B : p \in S_1\}| = |S_1| > |A|$$

וזו בדיוק המסקנה המבוקשת.

<u>מסקנה 1.3</u> כל תורה T מקיימת בדיוק אחד מהתנאים הבאים:

1) $K_T(\lambda) > \lambda^+$ לכל λ, ו־T נקרא בלתי יציבה.

2) $(\lambda^{|T|})^+ \geq K_T(\lambda) > \lambda^{\aleph_0}$ לכל λ, ו־T נקרא יציבה, אך לא על יציבה.

3) $(2^{|T|})^+ + \lambda^+ \geq K_T(\lambda)$ נקרא על יציבה וכן יציבה.

פרק 2

כמה תכונות של תורות יציבות.

בפרק זה נשתדל להכליל כמה מושגים ומשפטים שהובאו ב [9] Morley לתורות טרנסדנטליות לתלויין לתורות יציבות. נגדיר דרגה של טפוס כך שלא תהיה סדרה יורדת של דרגות מטפוס $|T|^+$. כן נראה כי אם $A \subset M, |A| < \|M\|, K_T(|A|) = |A|^+$ אז יש קבוצה בלתי מובחנת מעל A בעוצמה $> |A|$, ולבסוף נראה שמעל כל מבנה יש מודל ראשוני בין המודלים דוויי ה λ.

<u>הגדרה 2.1</u>

1) נגדיר את $S_R^\alpha(A)$, $TR_R^\alpha(A)$ באינדוקציה על α:

$$S_R^0(A) = \{p : (\exists q)\, p \subset q \in S(A)\}$$

$TR_R^\alpha(A)$ תהיה קבוצת הטפוסים p, $p \in S_R^\alpha(A)$ שיש להם תת טפוס סופי q שלכל הרחבה B של A אין ל q שתי הרחבות סותרות ב $S_R^0(B)$.

$$S_R^\alpha(A) = S_R(A) - \bigcup_{\ell<\alpha} TR_R^\ell(A)$$

2) יהי $p \in S_R(A)$, אם $p \in TR_R^\alpha(A)$ אז נגדיר את דרגת p כ $Rank_R(p) = \alpha$ ואם אין α כזה אז $Rank_R(p) = \infty$ (ברור שאין שני αים כאלה, כי $\alpha \neq \gamma \Rightarrow TR_R^\alpha(A) \cap TR_R^\gamma(A) = 0$.

כשנדבר על סדר בין דרגות, נסכים ש $\alpha < \infty$ לכל סודר α

<u>טענה 2.1</u>

1) אם $A \subset M$, $p \in S_R^0(A)$ אז יש הרחבה אלמנטרית של M בה p מתממש.

2) אם $A \subset B$, $p \in S_R^0(A)$ אז יש הרחבה של p הנמצאת ב $S_R(B)$

הוכחה: מיידית.

<u>טענה 2.2</u>

1) אם $p < q$ אז $Rank_R(p) \geq Rank_R(q)$

2) לכל טפוס p יש תת טפוס סופי q כך ש $\alpha = Rank(p) = Rank_R(q)$

3) אם $p\in S^0_R(A)$, $A\subset B$, $Rank_R(p)<\infty$ אז ל p יש לכל היותר הרחבה אחת שוה דרגה ב $S_R(B)$

<u>הוכחה</u>

1) אם $Rank_R(q)>Rank(p)=\alpha$ אז $p,q\in S^\alpha_R(A)$ ולכל $\pi\subset q$, $\aleph_0>|\pi|$ יש $A\subset B$ כך שיש ל π לפחות שתי הרחבות ב $S_R(B)$ כיון ש $p\subset q$ זה נכון לכל $\pi\subset p$, $|\pi|<\aleph_0$ ולכן $p\notin TR^\alpha_R(A)$ סתירה.

2) אם $p\in TR^\alpha_R(A)$ אז לפי הגדרת $TR^\alpha_R(A)$ יש תת טפוס סופי של p, q כך שלכל $A\subseteq B$ יש ל q לכל היותר הרחבה אחת ב $S^\alpha_R(A)$. כיון ש $q\subset p$ אז לפי 1 $Rank_R(q)\geq\alpha$. אילו היה קיים $Rank_R(q)>\alpha$ אז היו q_1,q_2 כך ש $q\subset q_1,q_2\in S^\alpha_R(B_1)$; q_1,q_2 הם טפוסים סותרים. כיון ש $q_1,q_2\in S^\alpha_R(B_1\cup A)$ נקבל סתירה להגדרת $TR^\alpha_R(A)$. אם $p\notin TR^\alpha_R(A)$ לכל α אז קל לראות שהטפוס הריק מקיים את התנאי.

3) הטענה נובעת ישירות מהגדרת הדרגה.

<u>טענה 2.3</u>

1) אם $Rank_R(p)<\infty$ אז $Rank_R(p)<(2^{|T|})^+$

2) אם $Rank_R(p)=\infty$ ו p סופית, יש B כך שיש ל p שתי הרחבות סותרות ב $S^0_R(B)$ שדרגתן ∞

<u>הוכחה:</u>

1) קל לראות שאם A ו B מבנים איזומורפיים, ו $p\in S^0_R(B)$ אז יש p', $p'\in S^0_R(A)$ כך ש $Rank_R(p)=Rank_R(p')$. כמו כן קל לראות שאם לכל A $TR^\alpha_R(A)=0$ אז $TR^\beta_R(A)=0$ לכל $\alpha\leq\beta$, A. לכן אם $Rank_R(p)\geq(2^{|T|})^+$ אז לכל סודר $(2^{|T|})^+>\alpha$ יש טפוס p_α כך ש $Rank_R(p_\alpha)=\alpha$ ולכן יש טפוס סופי q_α כך ש $Rank_R(q_\alpha)=\alpha$ (לפי 2.2.2). אך לכל q_α יש מבנה סופי B_α כך ש $S^0_R(B_\alpha)$. מצד שני אין יותר מ $2^{|T|}$ מבנים בלתי איזומורפיים סופיים, ולכל מבנה סופי B, $|S^0_R(B_\alpha)|\leq 2^{|T|}$

סתירה. לכן $Rank_R(p)<(2^{|T|})^+$

2) נסמן $\gamma=(2^{|T|})^+$. אם $Rank_R(p)=\infty$ אז $p\in S_R^\gamma(A)$

ו $p\notin TR_R^\gamma(A)$ ולכן ל p יש שתי הרחבות סותרות ב $S_R^\gamma(B)$ ל B

כלשהוא, p^1,p^2. כיון ש $p^1,p^2\in S_R^\gamma(B)$ אז

$Rank_R(p^1), Rank_R(p^2)\ge\gamma=(2^{|T|})^+$ לכן, לפי 2.3.1,

$Rank_R(p^1)=Rank_R(p^2)=\infty$.

__טענה 2.4__ התנאים הבאים שקולים: 1) Γ_R חסרת סתירה.

(הגדרת Γ_R מופיעה ב 1.2.6.)

2) הדרגה ה R ית של הטפוס הריק היא ∞

__הוכחה:__ נוכיח תחילה כי 2 גורר את 1.

נגדיר באינדוקציה את $\{q_\eta : \ell(\eta)<\omega$, η סדרה של 0 ו 1$\}$

כך ש $|q_\eta|<\aleph_0$, $Rank_R(q_\eta)=\infty$ ואם $\eta=\tau|n$ אז $q_\tau\le q_\eta$ ו $q_{\eta^\frown\langle0\rangle}, q_{\eta^\frown\langle1\rangle}$

טפוסים סותרים. נגדיר $q_{\langle\rangle}=\{\}$.

נניח שהגדרנו את q_η בעבור $\ell(\eta)<n$. נניח $\ell(\eta)=n-1$.

כיון ש $Rank(q_\eta)=\infty$ יש B כך שיש ל q_η שתי הרחבות

סותרות שדרגתן ∞ ב $S_R^0(B)$, q^1,q^2. לפי משפט הדחיסות קיימים

$p^1\subset q^1$, $p^2\subset q^2$, $|p^1|,|p^2|<\aleph_0$, ו p^1,p^2 הם טפוסים סותרים. נגדיר

$q_{\eta^\frown\langle0\rangle}=q_\eta\cup p^1$ ו $q_{\eta^\frown\langle1\rangle}=q_\eta\cup p^2$. ברור ש $q_{\eta^\frown\langle0\rangle}, q_{\eta^\frown\langle1\rangle}$

הם טפוסים סותרים. כיון ש $q_{\eta^\frown\langle0\rangle}\subset q^1$, $Rank_R(q_{\eta^\frown\langle0\rangle})\ge Rank_R(q^1)=\infty$

ולכן $Rank_R(q_{\eta^\frown\langle0\rangle})=\infty$. באופן דומה נראה כי $Rank_R(q_{\eta^\frown\langle1\rangle})=\infty$.

קל לראות שיש מבנה A, $|A|=\aleph_0$ כך שלכל η, $\ell(\eta)<\omega$ - $q_\eta\in S_R^0(A)$.

מצד שני אם $\ell(\eta)=\omega$ אז $\bigcup_{n<\omega} q_{\eta|n}\in S_R^0(A)$ ולכן יש ל $\bigcup_{n<\omega} q_{\eta|n}$

הרחבה q_η, $q_\eta\in S_R(A)$. לפי הגדרת ה q_η יוצא כי אם $\ell(\eta)=\ell(\tau)=\omega$

ו $\eta\ne\tau$ אז $q_\eta\ne q_\tau$ ולכן $|S_R(A)|\ge 2^{\aleph_0}>|A|$ ומ 1.1.3 נובע כי Γ_R

חסרת סתירה, ובזה הוכחנו כי 2) גורר את 1).

נוכיח את הכוון השני.

אם Γ_R חסרת סתירה, אז יש מבנה A [illegible] דרגה

$\{\bar a_\eta : \ell(\eta)<\omega\}$ כך ש $\models(\exists x)\left[\bigwedge_{i<\ell(\eta)} R(x,\bar a_{\eta|i})^{\eta(i)}\right]$. נגדיר בעבור η

כך ש $\ell(\eta)\le\omega$ את P_η: $P_\eta=\{R(x,\bar a_{\eta|n})^{\eta(n)} : n<\ell(\eta)\}$

קל לראות לפי הנחותינו כי $P_\eta\in S^0_R(A)$ (כלומר אין

ב P_η סתירה.) נניח ש $Rank(\{\})=\alpha<\infty$, כיון ש $\{\}\subset P_\eta$ אז

$Rank_R(P_\eta)\le\alpha$. תהי η הסדרה באורך $<\omega$ בעבורה $Rank_R(P_\eta)=\beta$

הוא מזערי.

נגדיר $\tau_0=\eta^\frown\langle 0\rangle$, $\tau_1=\eta^\frown\langle 1\rangle$

לפי הגדרה β, $Rank_R(P_{\tau_1})\geq\beta$, $Rank_R(P_{\tau_0})$ לכן $P_{\tau_0}\in S^\beta_R(A)$, $P_\eta\subset P_{\tau_1}$.

כיון ש $R(x,\bar a_\eta)\in P_{\tau_0}$, $\neg R(x,a_\eta)\in P_{\tau_1}$,

P_{τ_0}, P_{τ_1} הם טפוסים סותרים, וזה סותר את $Rank_R(P_\eta)=\beta$, סתירה.

לכן $Rank(\{\})=\infty$

הגדרה 2.2: נגדיר את הדרגה של טפוס p כלשהוא. יהי

$\langle R_i : i<|T|\rangle$ סדור סוב כלשהוא (אך קבוע) של הפרדיקטים ב $L(T)$.

נגדיר $Rank(p)=\langle Rank_{R_i}(p|R_i) : i<|T|\rangle$ בין

הדרגות מוגדר באופן טבעי סדר מלוני.

הוכחה: מידית.

טענה 2.5 תהי T תורה יציבה. אז

1) אין סדרה יורדת באורך $|T|^+$ של דרגות.

2) אם p טפוס מעל A אז אין ב $S(A)$ יותר מהרחבה אחת

שות דרגה של p.

3) לכל טפוס p יש $p\subset q$, $|T|\geq|q|$ כך ש $Rank(p)=Rank(q)$

הוכחה: מידית לפי 2.2 והגדרת הסדר בין הדרגות.

הערה: כל המשפטים בפרק זה עד כאן נכונים גם אם נחליף את

$S(A)$ ב $\{p$: p טפוס שלם מעל A שמשתניו $x_0,\dots,x_{n-1}\}$.

כיון שהוכחות דומות מאוד לא נביאן.

<u>הגדרה 2.3</u> 1) יהי $B \supset A$, $Y=\{y_i : i\in I=\alpha\}$ תקרא סדרה בלתי
מובחנת מעל A אם לכל n ו $i_1<\dots<i_n$;
$j_1<\dots<j_n$; $i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_n\in I$ הסדרות $\langle y_{i_1},\dots,y_{i_n}\rangle$
ו $\langle y_{j_1},\dots,y_{j_n}\rangle$ מגשימות אותו הטפוס מעל A. לעיתים
נאמר ש Y היא סדרה בלתי מובחנת מעל A גם אם I היא
קבוצה מסודרת בסדר לא טוב.

2) בתנאים הנ"ל Y תקרא קבוצה בלתי מובחנת מעל A אם
לכל $y_1,\dots,y_n\in Y$ ו $y_1',\dots,y_n'\in Y$; $y_i\neq y_j$, $y_i'\neq y_j'$, $i\neq j\Rightarrow$
הסדרות $\langle y_1,\dots,y_n\rangle$, $\langle y_1,\dots,y_n'\rangle$ מגשימות אותו טפוס מעל A.

<u>משפט 2.6</u> אם M מודל של תורה יציבה T ו $|T|<\lambda=|A|<\|M\|$
$A<M$ ו $K_T(|A|)=|A|^+$ אז יש ב M קבוצה בלתי מובחנת מעל
A בעוצמה $>\lambda$.

<u>הערה:</u> למעשה אפשר לחזק קצת את המשפט למשפט הבא:
אם M מודל של תורה יציבה T, ו $|T|^+\leq\lambda=|A|<\varkappa=|B|$, $B<M$
ו $\varkappa$ מונה סדיר, (רגולרי) $B<M$, $|B|<\varkappa\Rightarrow|\{p\in S(B): M$ מתגשם ב $p\}|<\varkappa$!
אז יש ב B קבוצה בלתי מובחנת מעל A בעוצמה $\varkappa$.

<u>הוכחה:</u> מ 2.5 $|A|=\lambda$ ו $K_T(\lambda)=\lambda^+$ נובע כי $|S(A)|\leq\lambda$
וכיון ש $\lambda<\|M\|$ יש טיפוס P, $p\in S(A)$ שמתגשם לפחות
ע"י λ^+ איברים ב M

<u>משפט עזר 2.7:</u> קיימת ב M הרחבה A^1 של A והרחבה p^1
של p ב $S(A^1)$ כך ש $|A^1|=\lambda$ ולכל B, $A^1<B$, $M\supset B$, $|B|=\lambda$
יש ל p^1 הרחבה יחידה שוות דרגה ב $S(B)$ וזו מתגשמת ב M
לפחות λ^+ פעמים.

<u>הוכחת מ.ע. 2.7:</u> נניח שהטענה אינה נכונה.
נגדיר כאינדוקציה סדרת מבנים A_i ל $i\leq|T|^+$ כך ש
1) $|A_i|\leq\lambda$ ו $A_0=A$ ו $A_i\subset M$ ראם $i<j\leq|T|^+$ אז $A_i\subset A_j$

$A_\delta = \bigcup_{i<\delta} A_i$ (2

(3 אם $p \subset q \in S(A_i)$ אז אם יש ל q הרחבה שות דרגה q_1
ב $S(A_{i+1})$ אז $|q_1(M)| \le \lambda$

ההגדרה ל $i=0$ ו i גבולי מופיעה בדרישות $A_0 = A$
ו $A_\delta = \bigcup_{i<\delta} A_i$. קל לראות ש A_0 ו A_δ מקיימים את
הדרישות 1-3.

נניח ש A_i מוגדרת, ונגדיר את A_{i+1}
יהי q טפוס כך ש $p \subset q \in S(A_i)$. כיון שהנחנו שמ.ע.2.7
איננו נכון, לא יתכן ש q ימלא את התנאי שמופיע בו, ולכן יש
$A_i \subset B_q$, $M \supset B_q$, $|B_q| = \lambda$ כך שאין ל q הרחבה כזו ב $S(B_q)$
שות דרגה, או שיש הרחבה כזו q_1 ו $|q_1(M)| = \lambda$
נגדיר $A_{i+1} = \bigcup\{B_q : q \in S(A_i), p \subset q\} \cup A_i$. קל לראות כי

$$|A_{i+1}| \le |\bigcup\{B_q : q \in S(A_i), p \subset q\}| + |A| \le \sum\{|B_q| : q \in S(A_i), q \subset p\} + \lambda \le$$

$$\le |\{q : q \in S(A_i), p \subset q\}|\lambda + \lambda \le |S(A_i)|\lambda + \lambda = \lambda \ ; \ A_{i+1} \supseteq A_i$$

נראה ש A_{i+1} מקיים את תנאי 3. אילו היה q, $p \subset q$ ב $S(A_{i+1})$ עם
הרחבה שות דרגה q_1 ב $S(A_{i+1})$ כך ש $|q_1(M)| > \lambda$ אז $q_1|(A_i \cup B_q)$
היה הרחבה שות דרגה של q ב $S(A \cup B_q)$ שמתגשם $>\lambda$ פעמים,
בסתירה להגדרת B_q. בזאת נגמרה ההגדרה.

נסמן $A^1 = A_{|T|^+}$. מ $|A^1| = \lambda$ נובע כי $|S(A^1)| = \lambda$,
כיון ש $|p(M)| > \lambda$ וכל אבר שמגשים את p מגשים את אחת
ההרחבות שלו ב $S(A^1)$ יש טפוס p^1 , $p^1 \in S(A^1)$ כך ש $|p^1(M)| > \lambda$, $p \subset p^1$.
נסמן $p_i = p^1|A_i$. קל לראות כי $p_i \in S(A_i)$, $p_{i+1} \in S(A_{i+1})$,
$p \subset p_i \subset p_{i+1} \subset p^1$, $p_i(M) \supset p^1(M)$, $|p_i(M)| > \lambda$
ולכן, לפי תנאי 3 בהגדרת A_i חייב להתקיים $\mathrm{Rank}(p_i) > \mathrm{Rank}(p_{i+1})$.
ברור כי אם $i < j$ אז $p_{i+1} \subset p_j$ ולכן
$\mathrm{Rank}(p_i) > \mathrm{Rank}(p_{i+1}) \ge \mathrm{Rank}(p_j)$ ולכן $\mathrm{Rank}(p_i) > \mathrm{Rank}(p_j)$

יוצא שיש לנו סדרה יורדת של דרגות באורך $|T|^+$ סתירה. לכן

מ.ע. 2.7 נכון.

עתה נגדיר סדרה $Y=\langle y_i : i<\lambda^+\rangle$ ב M.

y_i יהיה אבר ב M המגשים את ההרחבה שוה הדרגה של p^1, q_i

ב $S(A^1\cup\{y_j : j<i\})$. הטפוס: q_i קיים ויש

אבר שמגשים אותו (ואפילו λ^+ אברים כאלה) לפי הגדרת p^1, A^1

כיון ש $|A^1\cup\{y_j : j<i\}|\le \lambda+|i|=\lambda$

נראה $\{y_i : i<\lambda^+\}$ היא הקבוצה המבוקשת. ברור שאם נראה

שהיא קבוצה בלתי מובחנת מעל A^1 ינבע מכך שהיא קבוצה

בלתי מובחנת מעל A כי $A\subset A^1$.

<u>משפט עזר 2.8</u>: $\langle y_i : i<\lambda^+\rangle$ היא סדרה בלתי מובחנת מעל A^1

<u>הוכחה</u> ב.ה.כ. מספיק להוכיח שאם $0\le i_0<\dots<i_n<\lambda^+$

אז הסדרות $\langle y_0,\dots,y_n\rangle$ ו $\langle y_{i_0},\dots,y_{i_n}\rangle$

מגשימות אותו הטפוס מעל A^1, או מה ששקול לזה הפונקציה F

שתחומה $A^1\cup\{y_0,\dots,y_n\}$ והמוגדרת $F(a)=a$ אם $a\in A^1$

ו $F(y_k)=y_{i_k}$ היא העתקה אלמנטרית. נוכיח זאת באינדוקציה

על n. $n=0$. לפי הגדרת y_{i_0} הוא מגשים את q_{i_0} שהוא הרחבה

של הטפוס q_0 אותו מגשים y_0 לכן y_0, y_{i_0} מגשימים אותו

טפוס. נניח שהטענה הוכחה ל n ונוכיחה ל $n+1$. לפי הנחת

האינדוקציה $F'=F|(A^1\cup\{y_0,\dots,y_n\})$ היא העתקה אלמנטרית.

כיון ש F' היא העתקה 1−1 ערכית מהמבנה $A^1\cup\{y_0,\dots,y_n\}$ על המבנה

$A^1\cup\{y_{i_0},\dots,y_{i_n}\}$ אפשר להתאים לה העתקה 1−1 ערכית $\bar{F}$

מ $S(A^1\cup\{y_0,\dots,y_n\})$ על $S(A^1\cup\{y_{i_0},\dots,y_{i_n}\})$

יהי $q^1=\bar{F}(q_{n+1})$. ברור כי $Rank(q^1)=Rank(q_{n+1})=Rank(p^1)$

וכיון ש F' היא הזהות ב A^1 קל לראות כי $q^1\supset p^1$. כמו כן

$q^2=q_{i_{n+1}}|(A\cup\{y_{i_0},\dots,y_{i_n}\})$ כמו מקיים $q^2\supset p^1$ $Rank(p^1)=Rank(q^2)$

לכן $q^1=q^2$ ולכן $\bar{F}$ היא העתקה

אלמנטרית וזוהי טענת מ.ע. 2.8.

נותר לנו להוכיח רק ש $\{y_i : i<\lambda^+\}$ היא קבוצה בלתי מובחנת. נניח שלא, אז כיון שהיא סידרה בלתי מובחנת יש פרדיקט R כך שיש תמורה θ של $\{0,\dots,n\}$ כך ש

$$M\models R(y_0,\dots,y_n,\bar a)\equiv\neg R(y_{\theta(0)},\dots,y_{\theta(n)})$$

כש $\bar a$ סדרה של אברים ב A^1. במקרה זה הראה Morley ב 4.6, שיש נוסחה $R_1(x,y,\bar b)$ ($\bar b$ סדרה של אברים מ $A\cup Y$, R_1 כמו R רק בשינוי סדר המשתנים) שמסדרת קבוצה אינסופית, ולכן יש מבנה A כך ש $|S_{R_1}(A)|>|A|\geq\aleph_0$ וזה בסתירה ל 1.1.3 (כי T יציבה). יוצא ש $\{y_i : i<\lambda^+\}$ היא קבוצה בלתי מובחנת מעל A בעוצמה $>\lambda$

<u>הגדרה 2.4</u> תהי K מחלקת מודלים ו A מבנה המוקף לפחות ע"י אחד מהמודלים ב K

1) מבנה B יקרא ראשוני ב K מעל A אם $A\subset B$ ואם כל העתקה אלמנטרית של A לתוך מודל ב K נתנת להרחבה להעתקה אלמנטרית של B לתוך אותו מודל.

2) מודל M יקרא ראשוני ב K מעל A אם $M\in K$ ו $|M|$ מבנה ראשוני ב K מעל A

3) אם K היא מחלקת המודלים הרוויים ה λ של תורה T אז במקום לאמר ש M הוא מודל ראשוני ב K מעל A נאמר ש M הוא מודל רווי λ ראשוני מעל A, או מודל ראשוני ב λ מעל A

<u>משפט 2.9</u> נניח כי T תורה יציבה, ומתקיים אחד משני התאים התנאים הבאים:

1) $|T|<\lambda$ או אין סדרה יורדת באורך λ של דרגות.

כיון שאין סדרה יורדת באורך $|T|^+$ של דרגות, מספיק להוכיח את

המשפט למקרה השני)

המשפט למקרה השני)

2) יש $\lambda > \mu$ כך ש $|A| \le 2^{(\mu)} \Rightarrow |S(A)| < 2^{\mu}$

אז 1)מעל כל מבנה A יש מודל ראשוני ב λ

2)אם $B \subset A$ ו $p \in S(B)$ ולכל $A \supset B_1$, $\lambda > |B_1|$

יש מודל דווי M, λ המשמים את $B \cup B_1 \subset M, p$ אז כל מודל ראשוני דווי

λ מעל A משמים את p. אם λ סינגולרי אז צריך לדרוש גם

שהתנאי בחלק זה יתקיים לכל B_1 כך ש $\lambda \ge |B_1|$

<u>הערה:</u> ברור שב2) מספיק להניח שיש העתקה אלמנטרית של $B \cup B_1$

לתוך מודל דווי λ המשמים את הספוס שמתאים ל p

<u>הוכחת 2.9</u>

<u>משפט עזר 2.10</u> אם $\langle A_i : i \le \alpha \rangle$ סדרת מבנים כך

ש $A_\delta = \bigcup_{i<\delta} A_i$ בעבור כל סודר גבולי δ

ו A_{i+1} הוא מבנה ראשוני ב K מעל A_i לכל $\alpha > i$ אז A_α הוא

מבנה ראשוני ב K מעל A_0

<u>הוכחה:</u> תהי F העתקה אלמנטרית מ A_0 לתוך מודל M, $M \in K$.

נגדיר באינדוקציה סדרת העתקות אלמנטריות F_i לתוך M

כך שלכל $i < j$ F_j היא הרחבה של F_i ותחומה הוא A_i.

$F_0 = F$, ובעבור סודר גבולי δ $F_\delta = \bigcup_{i<\delta} F_i$. קיום F_{i+1}

מובטח ע"י הדרישה ש A_{i+1} הוא מבנה ראשוני ב K מעל A_i.

קיום F_α מראה ש A_α הוא מבנה ראשוני ב k מעל A_0

<u>הגדרה 2.5:</u> $p \in S(A)$ יקרא טפוס בדוד λ אם יש $p \supset p'$

כך ש p הוא ההרחבה היחידה של p' ב $S(A)$ ו $|p'| < \lambda$

<u>משפט עזר 2.11</u> אם לכל מבנה A וטפוס p מעל A, $|p| < \lambda$,

יש הרחבה בדודה λ ב$S(A)$ אז מעל כל מבנה A יש מודל ראשוני

<u>הוכחת מ.ע. 2.11</u> תהי K מחלקת המודלים של T שהם רוויי λ.
קל לראות שאם A מבנה ו $p \in S(A)$ הוא טפוס בדוד λ ו a אבר המגשים את p אז $A \cup \{a\}$ הוא מבנה ראשוני ב λ מעל A

נראה תחילה שמעל כל מבנה A_1 יש מבנה ראשוני ב K, A_2 כך שכל טפוס מעל A_1 שעוצמתו $< \lambda$ יש אבר שמגשים אותו ב A_2. תהי $\{p_i : i < \alpha\}$ קבוצת הטפוסים מעל A_1 שעוצמתם $< \lambda$. נגדיר באינדוקציה את A_1^i ל $\alpha \geq i$. $A_1^0 = A_1$, לסודרים גבוליים $A_1^\delta = \bigcup_{i<\delta} A_i$. עתה נגדיר את A_1^{i+1} - לפי הנחות המשפט, כיון ש $|p_i| < \lambda$ יש ל p_i הרחבה p_i' בדודה λ ב $S(A_1^i)$ יהי a_i אבר שמגשים את p_i', $A_1^{i+1} = A_1^i \cup \{a_i\}$. לפי הבניה יוצא כי A_{i+1} ראשוני מעל A_1^i ב K ו $A_1^\delta = \bigcup_{i<\delta} A_1^i$ ולכן $A_2 = A_1^\alpha$ הוא מבנה ראשוני מעל A_1 ב K כמו כן ברור כי לכל טפוס מעל A_1 שעוצמתו $< \lambda$ יש אבר שמגשימו ב A_2. יוצא ש A_2 מקיים את הדרישות שדרשנו בתחילת הקטע.

נגדיר באינדוקציה סדרת מבנים $\langle A_i : i \leq \lambda^+ \rangle$, $A_0 = A$ ובעבור סודרים גבוליים $A_\delta = \bigcup_{i<\delta} A_i$. A_{i+1} יהיה מבנה ראשוני ב K מעל A_i בו מתגשם כל טפוס מעל A_i שעוצמתו $< \lambda$ (כבר הוכחנו שיש מבנה כזה).

קל לראות כי A_{λ^+} הוא מבנה ראשוני ב K מעל $A = A_0$. כמו כן אם p הוא טפוס מעל A_{λ^+} שעוצמתו $< \lambda$ אז יש $\lambda^+ > i$ כך ש p הוא טפוס מעל A_i ולכן מתגשם ב A_{i+1} ולכן גם ב A_{λ^+} קל לראות מכך ש M, $|M| = A_{\lambda^+}$ הוא מודל של T ואף מודל רווי־λ של T ובכך הוכחנו את מ.ע. 2.11.

נותר לנו להוכיח את הנחה 2.11, כלומר: אם A מבנה, p טפוס מעל A ו $\lambda > |p|$ אז יש ל p הרחבה בדודת λ ב $S(A)$ ההוכחה תתפצל לשני מקרים. המקרה בו תנאי 1 מהמשפט קיים,

והמקרה בו תנאי 2 קיים.

נניח שהתנאי ה-1 קיים. נגדיר סדרה עולה p_i כך ש $|p_i|<\lambda$

ו $p\subset p_i$. ל $i=0$ $p_0=p$. לסודר גבולי $\delta<\lambda$, $p_\delta=\bigcup_{i<\delta}p_i$

נגדיר את p_{i+1}. אם ל p_i יש הרחבה יחידה $\bar{p}$ ב $S(A)$

אז הוכחנו את טענתנו, ולא יש לפחות שתי הרחבות p^1,p^2.

כיון ש $p^1,p^2\in S(A)$ ו $p^1\neq p^2$ הן הרחבות סותרות של p_i

לפחות אחד מהם הוא קטן דרגה, ויש תת-ספוס סופי

שוה דרגה q_i ונגדיר $p_{i+1}=p_i\cup q_i$

ברור מכאן שאם $i<j$ אז $Rank(p_j)<Rank(p_i)$ ולכן אם

הטענה איננה נכונה, יש לנו סדרה יורדת של דרגות,

באורך λ בניגוד להנחה.

נניח אם כן שתנאי 2 במשפט 2.9 מתקיים, ונניח שיש ספוס p $(\lambda>|p|)$

מעל A שאין לו הרחבה בודדה λ, $r\in S(A)$, r. נגדיר באינדוקציה על

$l(\eta)$ את קבוצת הספוסים $\{p_\eta : l(\eta)<\mu\}$ כך

ש $|p_\eta|<\lambda$ ואם $i<l(\eta)$ אז $p_{\eta\restriction i}\subset p_\eta$ והספוסים $p_{\eta^\frown\langle 0\rangle}$

ו $p_{\eta^\frown\langle 1\rangle}$ הם סותרים. נגדיר $p_{\langle\rangle}=p$. אם $\mu>l(\eta)$

הוא סודר גבולי אז $p_\eta=\bigcup_{l<l(\eta)}p_{\eta\restriction l}$. קל לראות שהתנאים

מתקיימים. נניח שנרצה להגדיר את הספוסים p_η בעבורם $l(\eta)=i+1$.

לפי הנחותינו אם $l(\tau)=i$ אז יש ל p_τ לפחות שתי הרחבות

סותרות, p^1,p^2 ב $S(A)$. חייבת להיות נוסחה

$\varphi_\tau=\psi_\tau(x,\bar{a}_\tau)$ כך ש $\varphi_\tau\in p^1$ ו $\neg\varphi_\tau\in p^2$

נגדיר $p_{\tau^\frown\langle 0\rangle}=p_\tau\cup\{\varphi_\tau\}$

נגדיר $p_{\tau^\frown\langle 1\rangle}=p_\tau\cup\{\neg\varphi_\tau\}$

נגדיר $B=\{(\bar{a}_\tau)_n : l(\tau)<\mu,\ n<l(\bar{a}_\tau)\}$.

אם $l(\eta)=\mu$ יהי p_η ספוס כלשהוא ב $S(B)$ כך ש $p_\eta\supseteq\{(\varphi_{\eta\restriction i})^{\eta(i)} : i<\mu\}$.

אם $\tau\neq\eta$, $\mu=l(\eta)=l(\tau)$ ו i הסודר המזערי כך ש $\eta(l)\neq\tau(l)$

ו בה"כ. $\tau(l)=1$, $\eta(l)=0$ אז

קל לראות כי $\varphi_{\eta\restriction l}\in p_\eta$ ו $\neg\varphi_{\eta\restriction l}\in p_\tau$ ולכן $p_\eta\neq p_\tau$.

יוצא ש $|B| = |\{(\bar a_\tau)_\eta : \ell(\eta)<\mu \,, \eta< \ell(\bar a_\tau)\}| \le \aleph_0 |\{\tau : \ell(\tau)<\mu\}| =$
$= \aleph_0 \cdot \Sigma_{\alpha<\mu} 2^{|\alpha|} = 2^\mu \;; |S(B)| \ge |\{p_\eta : \ell(\eta)=\mu\}| = 2^\mu$
בסתירה להנחה.

יוצא שבשני המקרים הוכחנו את ההנחה של 2.11, ולכם הוכחנו
את 2.9.1. נשאר לנו להוכיח את 2.9.2.

תחילה נראה שמספיק להראות שיש מודל ראשוני ב λ מעל A
שמשמיט את p. יהיו M_1 ו M_2 מודלים ראשוניים ב λ מעל A
ונניח כי ב M_1 p אינו מתגשם. עתה M_2 הוא מודל ראשוני ב λ
מעל A ויש העתקה אלמנטרית (הזהות) של A לתוך M_1 ולכן יש להעתקה
זו הרחבה F שהיא שכון של M_2 ב M_1. ברור שאילו התגשם
p ב M_2 הוא היה מתגשם ב M_1 ובכך הוכחה הטענה שהופיעה
בתחילת הקטע.

נתבונן בהוכחת קיום המודל הראשוני. בהוכחה זו הוכחנו
שקיים מודל ראשוני רווי λ מעל A כך ש: $|M| = A \cup \{a_i : i<\alpha\}$
ו a_i מגשים את הטפוס q_i מעל $A \cup \{a_j : j<i\}$ ו q_i
הוא טפוס בדוד λ. נראה שבמודל מסוג זה p אינו מתגשם, ובכך
נשלים את הוכחת המשפט. כיון ש q_i הוא בדוד λ יש טפוס
$q_i \subset q_i'$ כך ש q_i הוא ההרחבה היחידה של q_i'
ב $S(A\cup\{a_j : j<i\})$ ו $\lambda > |q_i'|$. ב.ה.כ.
נניח כי $q_i' \in S(A_i)$ ו $|A_i|<\lambda$ אם כי אולי $|q_i'| \nless \lambda$.
נניח שהטפוס p מתגשם ב M ומגשימו הוא a_{i_0}, נגדיר באינדוקציה
את סדרת המבנים A^n ל $n<\omega$.
$A_0 = \{a_{i_0}\}$ ו $A^n = \cup\{A_j : a_j \in A^{n-1}\} \cup A^{n-1}$
נסמן $A^\omega = \cup_{n<\omega} A^n$. קל לראות כי $A\cup\{a_j : j<\alpha\} \supset A^\omega$
וכי אם $a_i \in A_\omega$ אז $A_i \subset A_\omega$. קל לראות כי $|A^\omega| < \lambda$
אם λ סדיר. נניח כי $A^\omega = (A^\omega \cap A)\cup\{a_{i_k} : k<\beta\}$ ונסמן $b_k = a_{i_k}$.
נראה כי $A^\omega \cup B$ הוא מבנה ראשוני רווי λ מעל $(A^\omega \cap A)\cup B$.

לשם כך מספיק להראות ש $c_{\ell+1}$ הוא מבנה ראשוני רווי
λ מעל c_2

כש $a_j=b_i$ וזה ברור כי $c_i=(A^\omega \cap A)\cup B\cup\{b_k: k<i\}$

מגשים מעל C_i את הספוס $q_j|C_i$ וכיון ש $q_j^i \subset q_j|C_i$ ברור כי

זהו ספוס בדוד λ, כיון שהראבר ש $A^\omega\cup B$ הוא מבנה ראשוני מעל

וב $(A^\omega\cap A)\cup B$ $A^\omega\cup B$ הספוס p מתגשם, נגיע לסתירה

להנחות של 2.9.2, ולכן p אינו מתגשם, וזו המסקנה הנדרשת,

ובזה נסתימה ההוכחה.

נביא את המסקנה השמושית ביותר של 2.9.2

<u>מסקנה 2.12:</u> אם T יציבה ו $A_1=A\cup\{y_i: i<\alpha\}$

מבנה בו $\{y_i: i<\alpha\}$ היא קבוצה בלתי מובחנת מעל A ולכל $\aleph_0<\lambda\leq\alpha$

יש מודל דורי λ המקיף את $A\cup\{y_i: i<\kappa\}$ ומשמיט את $p\in S(A)$, p

אז כל מודל ראשוני דורי λ מעל A_1 משמיט את p

<u>הוכחה:</u> מידית, בהסמך על העובדה שאם $Y_1, Y_2 \subset\{y_i: i<\alpha\}$

ו $|Y_1|=|Y_2|$ אז יש העתקה 1-1 ערכית מ Y_1 על Y_2, F, ואם

נגדיר את $\bar{F}$ כפונקציה שתחומה $A\cup Y$ ול $a\in A$, $F(a)=a$

ו $\bar{F}(y_i)=F(y_i)$ אם $y_i\in Y_1$ אז $\bar{F}$ היא העתקה אלמנטרית.

פרק 3

קטגוריות של מחלקות אלמנטריות ופסאודו - אלמנטריות

<u>משפט 3.1:</u> יהי M מודל של תורה לאו דוקא שלמה, Q פרדיקט ב $L(T)$ ו p טפוס; ו $\gamma=(2^{|T|})^+$ אם $\aleph_0<|T| \wedge |T|\neq\beth_\delta \vee \omega<cf\,|T|$ ו $|T|\neq\beth_\delta$ אם $cf\,\delta=\omega$ ו $\gamma=(|T|+\aleph_0)^+$ אחרת.

1) אם M משמיט את p, $\beth(|Q(M)|,\gamma)\leq\|M\|$ אז בכל עוצמה $\leq|T|$. יש ל T מודל M_1 המשמיט את p ו $|Q(M_1)|\leq|T|$

2) אם M משמיט את p ו $\beth(|Q(M)|,\gamma)\leq\|M\|$, $\beth_\gamma\leq|Q(M)|$, $\lambda\geq\varkappa\geq|T|$ אז יש ל T מודל M_1 המשמיט את p ו $|Q(M_1)|=\varkappa$ ו $\|M_1\|=\lambda$

<u>הוכחה:</u> ההוכחה דומה להוכחת משפטים דומים ב Morley [10] ו Vaught [20] ולכן לא נביא אותו כאן.

<u>הגדרה 3.1:</u>

1) מחלקה פסאודו-אלמנטרית $PC(T_1,T)$ היא מחלקת הצמצומים של מודלים של T_1 ל $L(T)$. נניח תמיד כי T שלמה ו $T_1\supset T$.

2) מחלקת המודלים של תורה T או בקצור תורה T היא קטגורית בעוצמה λ, אם כל שני מודלים של T שעוצמתם λ הם איזומורפיים.

3) $PC(T_1,T)$ קטגורית בעוצמה λ אם כל שני מודלים ב $PC(T_1,T)$ שעוצמתם λ הם איזומורפיים.

<u>משפט 3.2:</u>

1) תהי $PC(T_1,T)$ מחלקה פסאודו-אלמנטרית, אז קיימת תורה T_2, לאו דוקא שלמה, ו $|T_2|\leq|T_1|+\aleph_0$ ובה פרדיקט Q וטפוס p כך שיש ב $PC(T_1,T)$ מודל לא [illegible]

בעוצמה $|T|<\lambda$ אם ורק אם יש ל T_2 מודל M המשמיט את p ו $|Q(M)|<\|M\|=\lambda$.

2) כמו כן קיימת תורה T_3, לאו דוקא שלמה $|T_3|\le|T_1|+\aleph_0$ ובה פרדיקט Q וטפוס p כך שיש ב $PC(T_1,T)$ מודל לא הומוגני בעוצמה λ אם ורק אם יש ל T_3 מודל M המשמיט את p ו $|Q(M)|<\|M\|=\lambda$ (ראה Keisler [6]).

הוכחה

1) שפת T_2 תהיה $L(T_1)$ בתוספת Q ובתוספת פרדיקט $R_\varphi(\bar y)$ לכל נוסחה $\varphi(x,\bar y)$ ב $L(T)$.

נגדיר

$$T_2=T_1\cup\Big\{\Big[(\forall\bar y^1,\dots,\bar y^m)\Big(\Big[\bigwedge_{n<m,\,k<\ell(\bar y^n)}Q((\bar y^n)_k)\Big]\wedge$$
$$\wedge\Big[\bigwedge_{n<m}R_{\varphi_n}(\bar y^n)\Big]\to(\exists x)\bigwedge_{n<m}\varphi_n(x,\bar y^n)\Big):L(T)\ni\varphi_1,\dots,\varphi_m\Big\}\cup$$
$$\cup\Big\{(\forall\bar y)\Big(\bigwedge_{k<\ell(\bar y)}Q(\bar y_k)\to R_\varphi(\bar y)\vee R_{\neg\varphi}(\bar y)\Big):\varphi\in L(T)\Big\}$$
$$p=\Big\{(\forall\bar y)\Big(R_\varphi(\bar y)\wedge\bigwedge_{k<\ell(\bar y)}Q(\bar y_k)\to\varphi(x,\bar y)\Big):\varphi\in L(T)\Big\}$$

נראה כי T_2 ו p מקיימים את תנאי המשפט.

ראשית נניח שיש ל T_2 מודל M בעוצמה λ המשמיט את p ו $|Q(M)|<\lambda$. ברור שהצמצום של M ל $L(T)$ שייך ל $PC(T_1,T)$ ולכן נותר להוכיח כי הצמצום איננו דורי.

נגדיר

$$p_1=\{\psi(x,\bar a):M\models R_\psi(\bar a),\ \bar a\in Q(M),\ \psi\in L(T)\}$$

ברור כי $|T|<\lambda=\|M\|$, $|p_1|\le|Q(M)|$ וכן p_1 הוא טפוס T, $p_1\in S^T(Q(M))$ (לפי T_2), וכיון ש M משמיט את p הוא משמיט את p_1 ולכן הצמצום של M ל $L(T)$ איננו דורי.

נוכיח עתה את הכוון השני, כלומר שאם יש ב $PC(T_1,T)$ מודל לא דורי בעוצמה λ אז יש ל T_2 מודל M בעוצמה λ המשמיט את p ובו $|Q(M)|<\|M\|$. יהי M_1 מודל של T_1 בעוצמה λ שצמצומו ל $L(T)$ M_2 איננו דורי. כיון ש M_2 איננו דורי, יש $M_1\supset A$, $\|M\|>|A|$, $p\in S^T(A)$ כך ש p מושמט ב M_1. נוסיף ל M_1 יחסים כדי להפכו למודל של

T_2: $Q = A,\ R_\psi = \{a : \psi(x,\bar a) \in p\}$

קל לראות שקבלנו מודל M של T_2 המשמיט את p $\|M\| = \lambda,\ |Q(M)| < \lambda$.

2) הוכחת 2 דומה ולכן לא נפרסה. ההבדל היחיד הוא שנצטרך לה להוסיף פונקציות שתראינה שבכל מודל של T_2 אם נגדיר את P_1 כמו קודם, אז צמצומו לכל תת מבנה סופי יתגשם.

<u>טענה 3.3</u>
1) אם $|T_1| \leq \lambda$ ו $|S(A)| < \lambda \Rightarrow |S(A)| \leq \lambda$
אז יש ב $PC(T_1,T)$ מודל רווי λ $cf\lambda$ בעוצמה λ
2) אם $|T_1| \leq \lambda$ ו $\mu \leq \lambda$ ו μ סדיר, $|A| \leq \lambda \Rightarrow |S^T(A)| \leq \lambda$
אז יש ב $PC(T_1,T)$ מודל רווי μ ב λ

<u>הוכחה:</u> כיון שההוכחות של 1 ו 2 דומות נוכיח רק את 2. נגדיר באינדוקציה שרשרת אלמנטרית של מודלים M_i ל $i \leq \mu$.
M_0 יהיה מודל כלשהוא של T_1 בעוצמה λ. לסודרים גבוליים $M_\xi = \bigcup_{i<\xi} M_i$. $M_{\xi+1}$ יהיה הרחבה אלמנטרית של M_ξ בה מתגשם כל טפוס ב $S^T(|M_\xi|)$ ו $\|M_{\xi+1}\| = \lambda$.
זה אפשרי כי $|S^T(|M_\xi|)| \leq \lambda$
קל לראות כי M_μ הוא המודל המבוקש.

<u>מסקנה 3.4:</u> אם T תורה בלתי יציבה אז ב $PC(T_1,T)$ יש מודל רווי בעוצמה סדירה λ $|T_1| < \lambda$ אמם $\varkappa < \lambda \Rightarrow 2^\varkappa \leq \lambda$

<u>הוכחה:</u> נניח שקיים $\varkappa_1$ כך ש $\varkappa_1 < \lambda < 2^{\varkappa_1}$. נגדיר $\varkappa = \inf\{\varkappa : 2^\varkappa > \lambda\}$. הוכחנו ב 1.1 שאם T תורה בלתי יציבה, קיים מבנה A, $|A| \leq \Sigma_{\mu<\varkappa} 2^\mu \leq \lambda$ שיש מעליו $2^\varkappa$ טפוסים סותרים שעוצמת כל אחד מהם היא $\varkappa$, $\{p_i : i < 2^\varkappa\}$ אילו היה ל T מודל רווי M בעוצמה λ, אז A היה נתן לשכון בו, או ב.ה.כ. $A \subset M$. בגלל הרויות כל טפוס P_i היה מתגשם ב , אך $|\{P_i : i < 2^\varkappa\}| = 2^\varkappa > \lambda$
ואין אבר שמגשים שני טפוסים, סתירה.

אם $\varkappa<\lambda \Rightarrow 2^{\varkappa}\le\lambda$ אז $|A|<\lambda \Rightarrow |S(A)|\le 2^{|A|+|T|}\le\lambda$

לכן לפי טענה 3.3.1 יש ב $PC(T_1,T)$ מודל רווי בעוצמה λ

משפט 3.5:

1) אם $K_T(\varkappa)>\varkappa^+\le\lambda$, $|T_1|\le\varkappa$ אז יש ב-$PC(T_1,T)$ מודל $M_{\lambda,\varkappa}$ כך ש $\|M_{\lambda,\varkappa}\|=\lambda$,

$\varkappa=\inf\{\mu:(\forall A\subset M_{\lambda,\varkappa})[|A|>\mu\Rightarrow$ ($S(A)$ מן הטיפוסים ב $|A|$ מתגשמים לא יותר מ $M_{\lambda,\varkappa}$ ב$)]\}$

2) וכן יש מודל $M_{\lambda,0}$ כך ש

$A\subset M_{\lambda,0}\Rightarrow |\{p\in S^T(A): M_{\lambda,0}$ ב מתגשם $p\}|\le|A|+|T_1|$

הוכחה: קיום $M_{\lambda,0}$ מוכח ב Morley[9] 3.7.

אם $K_T(\varkappa)>\varkappa^+$ יש מבנה A, $|A|=\varkappa$, $|S(A)|>\varkappa$

ולכן יש מודל $A\subset M_1$ של T, $\|M_1\|=\varkappa^+$, ו-$\varkappa^+$ מהטיפוסים ב $S(A)$ מתגשמים ב M_1. תהי $T_2=T_1\cup T(|M_1|)$. ברור שזו תורה חסרת סתירה, ו $|T_2|=\varkappa^+$ ולכן לפי האמור לעיל יש לה מודל M_2 בעוצמה λ המקיים $B\subset M_2\Rightarrow|\{p\in S^{T_2}(B): M_2$ ב מתגשם $p\}|\le|B|+|T_2|$

ברור שהצמצום של M_2 לשפה T הוא המודל הנדרש $M_{\lambda,\varkappa}$

מסקנה 3.6

1) אם $|T_1|=\aleph_\alpha$ ו T אינה יציבה, אז מספר טיפוסי האיזומורפיזם שלהמודלים $\{M:\|M\|=\aleph_\beta, M\in PC(T_1,T)\}$, $\ge|\beta-\alpha+1|$.

2) אם $|T_1|=\aleph_\alpha$ ו T אינה על יציבה, אז מספר טיפוסי האיזומורפיזם של מודלים $\{M\in PC(T_1,T):\|M\|=\aleph_\beta\}$ הוא לפחות $|(\beta-\alpha)\wedge\omega|$

3) אם $PC(T_1,T)$ קטגורית ב λ, $|T_1|\le\varkappa<\lambda$ אז $\varkappa^+=K_T(\varkappa)$

משפט 3.7: אם $PC(T_1,T)$ קטגורית ב λ ו $|T_1|<\lambda$

ו $\lambda\ne\varkappa(|T_1|)$

אז

1) $PC(T_1,T)$ קטגורית ב $\beth(\gamma\times\alpha)$ אם $\gamma=(2^{|T|})^+$, $0<\alpha$

(2 אם $|T_1| \le \varkappa$ אז $K_T(\varkappa)=\varkappa^+$

(3 $PC(T_1,T)$ איננה קטגורית ב μ אםם יש בה מודל לא רווי בעוצמה μ

הוכחה: נראה שיש ב $PC(T_1,T)$ מודל רווי $|T_1|^+$ בעוצמה λ. אם λ סדיר, כיוון שלפי 3.6.3

$$|A|<\lambda \Rightarrow |S(A)| < K_T(|A|) \le |A|^+ + |T_1|^+ \le \lambda$$

הרי לפי 3.3.1 יש ב $PC(T_1,T)$ מודל רווי בעוצמה λ ובפרט מודל רווי $|T_1|^+$ בעוצמה λ. נשאר המקרה ש λ סינגולרי. יהי $\varkappa = \varkappa(|T_1|)$ ולכן $\lambda > \varkappa \ge |T_1|$ ומכאן יוצא ש $K_T(\varkappa)=\varkappa^+$ ו $\varkappa^{\aleph_0} > \varkappa$ ולכן לפי 1.3 T חייבת להיות על יציבה. אם $K_T(\lambda) > \lambda^+$ אז לפי 1.2.3 $K_T(|T_1|) > \lambda^+ > |T_1|^+$ ולכן $K_T(|T_1|) > |T_1|^+$. זה בסתירה למה שהוכחנו קודם; ולכן $K_T(\lambda) = \lambda^+$. לפי משפט 3.3.2 נובע מכך שיש ב $PC(T_1,T)$ מודל רווי $|T_1|^+$ בעוצמה λ.

יוצא שתמיד יש ב $PC(T_1,T)$ מודל רווי $|T_1|^+$ בעוצמה λ. אילו היה ב $PC(T_1,T)$ מודל לא רווי בעוצמה $\beth(\gamma\times\alpha)$ אז לפי 3.2 ו 3.1 היה ב $PC(T_1,T)$ מודל לא רווי $|T_1|^+$ בכל עוצמה; ובפרט ב λ וזה בסתירה לקטגוריות. לכן כל מודל ב $PC(T_1,T)$ בעוצמה $\beth(\gamma\times\alpha)$ הוא רווי, וכיוון ששני מודלים רוויים שוי עוצמה ה $>|T|$ של אותה תורה שלמה T הם איזומורפיים, יוצא כי $PC(T_1,T)$ קטגורית ב $\beth(\gamma\times\alpha)$ ובזאת הוכח סעיף 1.

אם $|T_1| \le \varkappa$ אז $\varkappa < \beth(\gamma\times(\varkappa+1))$ ו $PC(T_1,T)$ קטגורית ב $\beth(\gamma\times(\varkappa+1))$ ולכן לפי 3.6.3 קיים $K_T(\varkappa)=\varkappa^+$ ובזאת הוכח סעיף 2.

יהי μ מונה $>|T_1|$ ו $\lambda \le \mu$ מונה סדיר כלשהו.

כיון ש $K_T(\mu)=\mu^+$ הרי לפי 3.3.2 יש ב $\mathcal{P}C(T,T)$
מודל רווי $\varkappa$ ב μ. אם $\mathcal{P}C(T_1,T)$ קטגורית ב λ המודל
שלה ב λ הוא רווי $\varkappa$ לכל מונה סדיר $\varkappa \geq \mu$ ולכן הוא מודל
רווי. מצד שני אם $\mathcal{P}C(T_1,T)$ אינה קטגורית ב μ הרי
חייב להיות בה מודל לא רווי בעוצמה זו, שכן כל שני מודלים
רוויים שוי עוצמה של אותה תורה שלמה הם איזומורפיים. בכך
הוכח סעיף 3, ולכן גם כל המשפט.

משפט <u>3.8</u> אם T קטגורית בעוצמה λ, $\lambda>|T|$ ו $\lambda \neq \varkappa(T)$
אז קיים מונה $\mu(|T|)>\mu$ כך ש T קטגורית בכל עוצמה
$\mu \leq$ ואינה קטגורית בשום עוצמה $\varkappa$, $|T|<\varkappa<\mu$

<u>הוכחה:</u> כיון שמחלקת המודלים של T היא $\mathcal{P}C(T,T)$, כל מה
שהוכחנו למחלקות פסאודו-אלמנטריות נכון כאן.

נוכיח תחילה שכל מודל רווי $|T|^+$ של T הוא רווי.
נניח שלא, ו M הוא רווי $|T|^+$ ואיננו רווי. כיון ש M הוא רווי
$|T|^+$, $\|M\| \geq |T|^+$ (ב $L(T)$ נמצא סמן השוויון), וכיון ש M
איננו רווי, אף $\|M\|>|T|^+$. כיון ש M איננו רווי יש
$M \supset A$ ו $p \in S(A)$ כך ש $|A|<\|M\|$ ו p מושמט
לפי 3.7.2 $K_T(|A|)=|A|^+$ (כי $|T|^+ \leq |A|$),
ולכן לפי 2.6 יש ב M קבוצה בלתי מובחנת מעל A, $\{y_i : i<|A|^+\}$.
נגדיר את המבנה $A \cup \{y_i : i<\beta\}$, $\beta=(2^{|T|})^+ \times |A|^+$
באופן הטבעי, כלומר כך ש $\{y_i : i<\beta\}$ תהיה קבוצת
בלתי מובחנת מעל A. יהי M_1 מודל ראשוני רווי $|T|^+$ מעל
$A \cup \{y_i : i<\beta\}$. ברור כי $\beth_\beta \leq \|M_1\|$
כי לפי 2.12 p איננו מוגשם ב M_1 ו $|p|<\beth_\beta$. לכן
יש ל T מודל לא רווי ב $\beth_\beta=\beth((2^{|T|})^+ \times |A|^+)$ וזה
בסתירה ל 3.7.1 ו 3.7.2. יוצא שהוכחנו שכל מודל רווי $|T|^+$
של T הוא רווי.

אם T אינה קטגורית בעוצמה $|T| < \varkappa$ אז יש ל T
מודל שאינו רווי $|T|^+$ ב $\varkappa$ ולכן אם $|T| < \varkappa_1 \le \varkappa$, יש ל T
מודל שאינו רווי $|T|^+$ ב $\varkappa_1$ ומכאן לפי 3.7.3, T
אינה קטגורית ב $\varkappa_1$ נגדיר

$$\mu = \inf\{\varkappa : \varkappa \text{ קטגורית ב } T,\ \varkappa > |T|\}$$

יוצא שכל מה שנותר לנו להוכיח הוא כי $\mu < \mu(|T|)$. כיון
שההוכחה דומה להוכחת 3.2.1 היא תנתן בקצור. לפי 3.2.1
יש תורה T_2, $|T_2| = |T|$ ובה פרדיקט Q ופסוק P
כך שיש ל T מודל לא רווי בעוצמה $\varkappa$ אםם יש ל T_2 מודל M
בעוצמה $\varkappa$ המשמיט את P, $|Q(M)| < \|M\|$. נוסיף לשפה
קבועים $\{c_i : i < |T|\}$ ונגדיר

$$P_1 = \{\psi(x) \vee (Q(x) \wedge x \neq c_i) : \psi(x) \in P,\ i < |T|\}$$

קל לראות כי ל T יש מודל שאינו רווי $|T|^+$ בעוצמה $\varkappa$
אםם יש ל T_2 מודל המשמיט את P_1 (אם M משמיט את P_1 הוא חייב
להשמיט את P ואת $\{Q(x) \wedge x \neq c_i : i < |T|^+\}$ ולכן $|Q(M)| \le |T|$)
אם $\mu \ge \mu(|T|)$ אז לפי הגדרת $\mu(|T|)$ בכל עוצמה $> |T|$
ובפרט ב λ יש ל T_2 מודל המשמיט את P_1 ולכן יש ל T מודל
שאינו רווי $|T|^+$ ולכן T אינה קטגורית ב λ, סתירה.
ובזה סיימנו את הוכחת המשפט.

פרק 4

על מודלים הומוגניים של תורות יציבות

בפרקים הקודמים היו כמה משפטים בהם מלא המושג "מודל רווי ב λ" תפקיד מרכזי, למשל 2.9 - קיים מודל ראשוני רווי ב λ מעל כל מבנה, ו-3.8 - שאפשר להסיק ממנו שאם לתורה T יש רק מודלים רוויים בעוצמה מסויימת $>|T|$ אז כך הוא המצב בכל עוצמה החל מעוצמה מסוימת $\beth_{(|T|)}$. בפרק זה ננסה להכליל את המשפטים הנ"ל, ע"י החלפה "רווי" ב"הומוגני". נראה שאם לתורה T יציבה, יש לה מודל הומוגני ב $(2^{|T|})^+$ בעוצמה $>2^{|T|}$ אז יש לה מודל הומוגני בעל אותה דיאגרמה בעוצמות גדולות כרצוננו.

ב [11] מופיעה הגדרה אחרת של הומוגניות, אך שקילות ההגדרות מוכחת ב [8]

<u>הגדרה 4.1:</u>

1) הדיאגרמה הסופית של מודל M, $D(M)$ היא קבוצת הטפוסים השלמים והסופיים (ז.א. על $n<\omega$ משתנים) מעל הקבוצה הריקה שמתגשמים ב M. D יסמן קבוצה של טפוסים סופיים. ברור כי $T\in D$ כי T הוא הטפוס היחיד עם אפס משתנים.

2) מבנה A יקרא מבנה D אם כל סדרה סופית של איבריו מגשימה טפוס השייך ל D. נגדיר באופן דומה מתי מודל הוא מודל D.

3) אם A מבנה D, $p\in S(A)$ אז p יקרא טפוס D מעל A אם כשמצרפים ל A איבר שמגשים את p נקבל מבנה D. טפוסים m-יים D-יים יוגדרו באופן דומה.

4) $$S_D(A)=\{p : p\in S(A),\ p \text{ טפוס } D \text{ מעל } A\}$$

5) $$K_D(\lambda)=\sup\{|S_D(A)| : |A|\leq\lambda\}$$

6) מודל M יקרא הומוגני ב (D,λ) אם כל p שמקיים $p\in S_D(A)$, $A\subset M$, $|A|<\lambda$ מתגשם ב M. ולכן $D=D(M)$ ידוע, כי

במקרה זה כל מבנה Dי בעוצמה $\leq \lambda$ נתן לשכון ב M.

<u>משפט 4.1</u> אם T תורה יציבה שיש לה מודל ההומוגני ב $(D, (2^{|T|})^{+})$ אז לכל M יש ל T מודל ההומוגני ב (D, M)

<u>הוכחה:</u> נוכיח תחילה משפט עזר.

<u>משפט עזר 4.2</u> בתנאי המשפט, אם $A \supset B$; A, A מבנים Dיים, ו $p \in S_D(A)$ אז יש ל p הרחבה ב $S_D(A)$

<u>הוכחת מ.ע. 4.2</u> נסדר את אברי A בסדר טוב $\{a_i : i < |A|\}$ נסמן $B_i = B \cup \{a_j : j < i\}$. נגדיר באינדוקציה את p_i כך ש $p_i \in S_D(B_i)$ ואם $j < i$ אז $p_j \subset p_i$, ו $p_0 = p$. ל 0 $p_0 = p$ ל $i+1$ אם ל p_i יש הרחבה השייכת ל $S_D(B_{i+1})$ אז הרחבה זו תהיה p_{i+1}. לסודרים גבוליים $p_\delta = \bigcup_{i<\delta} p_i$. קל לראות שאם $p_i \in S_D(B_i)$ לכל i $\delta >$ אז $p_\delta \in S_D(B_\delta)$, ולכן הסדרה מקיימת את הדרישות. אם $p_{|A|}$ מוגדר, הוכחנו את הנדרש, ולכן נניח שקיים k כך שאין ל p_k הרחבה ב $S_D(B_{k+1})$. יוצא שמשפט העזר שקול לטענה הבאה:

(*) בתנאי המשפט אם A מבנה Dי, p_1 טפוס Dי שלם מעל A שמשתנהו החופשי x, p_2 טפוס Dי שלם מעל A שמשתנהו החופשי y אז יש טפוס שלם $q = q(x, y)$ (משתניו החופשיים הם x ו y) מעל A כך ש $p_1, p_2 \subseteq q$.

נוכיח טענה זו. תחילה נראה שאם $A \supset A_1$, $2^{|T|} \geq |A_1|$ אז קיים טפוס Dי שלם מעל A_1 - $q(x, y)$ כך ש $p_1 | A_1 \subset q$, $p_2 | A_2 \subset q$. כיון ש $2^{|T|} \geq |A_1|$, A_1 נתן לשכון אלמנטרי במודל ההומוגני ב $(D, (2^{|T|})^{+})$ - M (יש מודל כזה לפי הנחות המשפט). לשם פשטות נניח ש $M \supset A_1$. $p_1 | A_1$ ו $p_2 | A_1$ הם טפוסים Dיים שלמים מעל קבוצה

שעוצמתה $> (2^{|T|})^+$ ולכן יש אברים ב M שמגשימים אותם . a

את $P_1|A_1$ ו b את $P_2|A_1$. המספר שהזוג $\langle a,b\rangle$ מגשים

מעל A_1 הוא טפוס המקיים את הדרישות הנ"ל.

נניח כי $q=q(x,y)$ הוא טפוס D-י שלם מעל $A\supset A_1$

המקיף את $P_1|A_1$ ואת $P_2|A_2$ ולכל תת קבוצה סופית F של

A ל q יש הרחבה q_F שהיא שוות דרגה

והיא טפוס D-י שלם מעל $A_1\cup F$ וכך ש $P_1|(A_1\cup F)\subset q_F$

ו $P_2|(A_1\cup F)\subset q_F$. במקרה זה $\bigcup\{q_F: F\subset A, |F|<\aleph_0\}$ מקיף את

P_1, P_2 ו $\in S_D(A)$ ולכן הוא מקיים את דרישות (*) ומוכיח

בזה את ט.ע. 4.2, ולכן נניח שאין q כנ"ל.

נגדיר באינדוקציה על i – סופית את סדרת המבנים $\langle A_i: i<|T|^+\rangle$

ו $|A_i|\le 2^{|T|}$, $A_i\subset A$, ל 0 $A_0=\{\}$, לסודרים

גבוליים $A_\delta=\bigcup_{i<\delta}A_i$ (ברור כי $|A_\delta|\le|\delta|\,2^{|T|}=2^{|T|}$)

נגדיר את A_{i+1} : לכל $q(x,y)$ שהוא טפוס D-י שלם מעל A_i

ומקיף את $P_1|A_1$ ו $P_2|A_1$ יש קבוצה סופית $F(q)\subset A$

כך שאין ל q הרחבה לטפוס D-י שלם שוה דרגה מעל $A_i\cup F(q)$

המקיף את $P_1|(A_i\cup F(q))$ ואת $P_2|(A_i\cup F(q))$. נגדיר

$A_{i+1}=A_i\cup(\bigcup_q F(q))$. כיון ש T יציבה $K_T(|T|)=(2^{|T|})^+$

ולכן גם מספר הטפוסים השלמים של $\langle x,y\rangle$ מעל A_i הוא $\le 2^{|T|}$ ולכן $|A_{i+1}|\le 2^{|T|}$

נסמן $A^1=A_{|T|^+}$. כיון ש $|A^1|\le 2^{|T|}$ הרי כבר הראנו

שיש טפוס D-י שלם מעל A^1 , $q=q(x,y)$ כך

ש $P_1|A^1\subset q$ ו $P_2|A_1\subset q$. נגדיר $q_i=q|A_i$.

קל לראות כי $F(q_i)\subset A_{i+1}$ ו $q|(A_i\cup F(q_i))$ הוא טפוס

D-י שלם מעל $A_i\cup F(q_i)$ ו $P_1|(A_i\cup F(q_i))\subset q|(A_i\cup F(q_i))$

$P_2|(A_i\cup F(q_i))\subset q|(A_i\cup F(q_i))$ ולכן לפי הגדרת $F(q_i)$ קיים

$Rank(q_l)<Rank\{q_{A_l}\cup F(A_l)\}$.אך $A_l\cup F(q_l)<A_{l+1}$ ולכן
$Rank(q_l)<Rank(q_{l+1})$. אם $i<j$ אז $q_{l+1}\subset q_j$ ולכן
$Rank(q_i)<Rank(q_j)$. ויוצא שיש לנו סדרה יורדת של דרגות באורך
$|T|^+$ סחירה. לכן $(*)$ ו מ.ע. 4.2 קיימים.

עתה נוכיח את המשפט עצמו. תחילה נראה כי אם A הוא
מבנה $\mathcal{D}$י, אז יש מבנה $\mathcal{D}$י B, $A\subset B$ בו מתגשמים כל הטפוסים
מ $S_{\mathcal{D}}(A)$. נניח כי $S_{\mathcal{D}}(A)=\{p_i : i<\delta_0\}$. נגדיר באינדוקציה
את A_i: $A_0=A$, לסודרים גבוליים $A_\delta=\bigcup_{i<\delta}A_i$, ול $i+1$:
לפי מ.ע. 4.2 יש ל p_i הרחבה ב $S_{\mathcal{D}}(A_i)$, p_i^1. לפי
הגדרת טפוס $\mathcal{D}$י (4.1-3) יש ל A_i הרחבה שהיא מבנה $\mathcal{D}$י ובה
מתגשם p_i^1. קל לראות כי A_{δ_0} הוא המבנה הנדרש בתחילת הקטע.

עתה נגדיר באינדוקציה סדרת מבנים $\mathcal{D}$יים. $A_0=\{\}$,
לסודרים גבוליים $A_\delta=\bigcup_{i<\delta}A_i$ ו A_{i+1} יהיה מבנה $\mathcal{D}$י
המרחיב את A_i בו מתגשמים כל הטפוסים ב $S_{\mathcal{D}}(A_i)$.

M, $A_\mu=M$, הוא המודל הנדרש. כי אם $M\supset B$ ו $\mu>|B|$
ו $p\in S_{\mathcal{D}}(A)$. אז יש $\mu>i$ כך ש $A_i\supset B$ ולכן לפי
4.2, יש ל p הרחבה p' ב $S_{\mathcal{D}}(A_i)$ ולפי הגדרת A_{i+1}, p'
מתגשם ב A_{i+1} ולכן גם ב M. יוצא ש p מתגשם ב M, נותר
להוכיח רק כי M איננו רק מבנה $\mathcal{D}$י, אלא גם מודל$_0$, לשם כך
מספיק להוכיח שאם $\bar{a}$ סדרה של אברים ב M ומקיים $(\exists x)R(x,\bar{a})$
אז יש $b\in M$, $\models R[b,\bar{a}]$. כידוע שיש מודל $\mathcal{D}$י הומוגני
ב $(2^{|T|})^+$ יש במודל הנ"ל סדרה $\bar{a}^1$ המגשימה את הטפוס ש $\bar{a}$ מקיימת,
ולכן יש בו אבר b^1 כך שמקיים $R[b^1,\bar{a}^1]$. אך ב M יש אבר b
כך ש $\bar{a}^1{}^\frown\langle b^1\rangle$ ו $\bar{a}^\frown\langle b\rangle$ מגשימות אותו הטפוס וזהו ה b
המבוקש. ולכן M הוא באמת מודל$_0$ והוכחה נסתיימה.

הערה: אפשר להחליף את הדרישה שיש מודל הומוגני ב $(\mathcal{D}(2^{|T|})^+)$
בדרישה שיש מודל הומוגני $(\mathcal{D},\lambda^+)$ ו $K_T(\lambda)=\lambda^+$.
בדרישה שיש מודל הומוגני

משפט 4.3

1) אם לתורה יציבה T יש מודל הומוגני ב $(D,(2^{|T|})^+)$ שעוצמתו $> 2^{|T|}$ אז לכל μ ל T יש מודל D הומוגני ב (D,μ) בעוצמה $\mu \leq$

2) באותם תנאים אם μ סדיר ו $K_D(\mu)=\mu^+$ אז ל T יש מודל ההומוגני ב (D,μ) שעוצמתו μ.

הוכחה: כיון ש T יציבה, קיים $K_T(2^{|T|})=(2^{|T|})^+$ ולכן לפי משפט 2.6 במודל ההומוגני $(D,(2^{|T|})^+)$ שעוצמתו $> 2^{|T|}$ יש קבוצה בלתי מובחנת בעוצמה $2^{|T|}$, $\{a_i : i<2^{|T|}\}$. נגדיר באופן הטבעי את מבנה הקבוצה $A=\{a_i : i<\mu\}$ כך שגם היא תהיה קבוצה בלתי מובחנת.
לפי משפט 4.1 יש מודל D הומוגני ב (D,μ) וכפי שהוזכר ב 4.1.6, A. נתן לשכון ב M ולכן $\|M\| \geq \mu$ ובזה הוכח חלק 1. חלק 2 נובע ממנו ישירות.

הערה: התנאי שעוצמת המודל ההומוגני ב $(D,(2^{|T|})^+)$ היא גדולה מ $2^{|T|}$ הוא נחוץ, הסבה היא שיש תורות יציבות T (ואף על יציבות) ודיאגרמות D כך שיש ל T מודל ההומוגני ב (D,μ), בעוצמה $2^{|T|}$ וזאת לכל μ. למשל אם הוא מודל עם λ יחסים חד - מקומיים $\{P_i(M) : i<\lambda\}$ כך שאין בו שני אברים שונים. a,b המקיימים $P_i[a]\equiv P_i[b]$ לכל $i<\lambda$ ו $\|M\|=2^\lambda$; אז $T=Th(M)$ $D=D(M)$ מהווים דוגמה לנאמר לעיל.

הגדרה 4.2: אם A מבנה D, M יקרא מודל ראשוני ב (D,λ) מעל A אם $A\subset M$ ו M הוא מודל ההומוגני ב (D,λ) ולכל מודל M' ההומוגני ב (D,λ), $A\subset M'$; יש ל M שכון אלמנטרי לתוך M' שהוא הזהות על A

<u>הגדרה 4.3:</u> הטפוס p, $p \in S_D(A)$ יקרא בדוד (D,λ) אם קיים p^1 כ $p \supset p^1$, $p^1 \in S_D(A^1)$, $|A^1| < \lambda$ כך שלטפוס p^1 יש הרחבה יחידה ב $S_D(A)$

<u>משפט 4.4:</u>
תהי T תורה שיש לה מודל ההומוגני ב (D,μ)

1 (1 T יציבה, ו $|T|<\mu$

או (2 $K_D(2^{(\lambda)}) \le 2^{\lambda}$ ו $\lambda<\mu$

אז מעל כל מבנה D' יש מודל ראשוני ב (D,μ)

<u>הוכחה:</u> נוכיח משפט עזר שאחריו ההוכחה ממש זהה לזו של 2.9, ולכן לא נחזור עליה.

<u>משפט עזר 4.5:</u> בתנאי המשפט, אם A מבנה D', $A_1 \subset A$, $p \in S_D(A_1)$ ו $|A_1| < \mu$ אז יש ל p הרחבה בדודה (D,μ), r, $r \in S_D(A)$

<u>הוכחת מ.ע. 4.5</u> נניח ש A, A_1, p מהווים דוגמה נגדית למשפט, ונגיע לסתירה, ובזה נוכיח את המשפט.

נראה שאם $q \in S_D(B_1)$, $B_1 \subset B$ ו B מבנה D', ו $|B| < \mu$ אז יש ל q הרחבה r, $r \in S_D(B)$ כמו שהוזכר בהגדרה 4.16 B נתן לשכון במודל ההומוגני ב (D,μ) שאת קיומו הנחנו בתנאי המשפט. ב.ה.כ. יהיה שכון זה הזהות. לפי הגדרת ההומוגניות q מתגשם במודל, והטפוס שנוצר שמגשים את q מעל B הוא הטפוס המבוקש. עתה נגדיר קבוצת טפוסים $\{p_\eta : l(\eta)<\mu\}$ (כרגיל η תהיה סדרה של אפסים ואחדים) באינדוקציה על $l(\eta)$ כך ש

(1 יש מבנה A_η כך ש $p_\eta \in S_D(A_\eta)$ $\aleph_0 + |l(\eta)|^+ + |A_1|^+ \geq |A_\eta|$

(2 אם $\alpha < l(\eta)$, $\tau = \eta|\alpha$ אז $p_\tau \subset p_\eta$ ולכן $A_\tau \subset A_\eta$

(3 $A_{\eta\frown\langle 0\rangle} = A_{\eta\frown\langle 1\rangle}$ ו $p_{\eta\frown\langle 1\rangle} \neq p_{\eta\frown\langle 0\rangle}$

ל $l(\eta)=0$ $\eta=\langle\rangle$ ו $p_\eta = p$, $A_\eta = A_1$:

אם $l(\eta)=\delta$ הוא סודר גבולי, אז $p_\eta = \bigcup_{i<l(\eta)} p_{\eta|i}$

ו $A_\eta = \bigcup_{i<l(\eta)} A_{\eta|i}$. קל לראות שבמקרים אלו התנאים מתקיימים.

יהי $\ell(\eta)=\ell$. נגדיר את $P_{\eta^\frown\langle 0\rangle}$, $P_{\eta^\frown\langle 1\rangle}$.
לכל קבוצה סופית $A \supseteq F$ יש ל P_η הרחבה ב $S_D(A_\eta \cup F)$
כי $|A_\eta \cup F| < \mu$. אם לכל F יש ל P_η הרחבה יחידה $q(F)$
אז $\bigcup\{q(F): F \subset A, |F| < \aleph_0\}$ היא הרחבה היחידה של P_η ב $S_D(A)$
ולכן זוהי הרחבה בדודה (D,μ) של $p \subset P_\eta$ ב $S_D(A)$ בנגוד
להנחה ש P, A, A_1 מהווים דוגמה נגדית ל מ.ע. 4.5, לכן יש
קבוצה סופית F_η כך שיש ל P_η לפחות שתי הרחבות, p^1, p^2
ב $S_D(A_\eta \cup F_\eta)$. נגדיר $A_{\eta^\frown\langle 1\rangle} = A_{\eta^\frown\langle 0\rangle} = A_\eta \cup F_\eta$
ו $P_{\eta^\frown\langle 1\rangle} = p^1$, $P_{\eta^\frown\langle 0\rangle} = p^2$ בזה סיימנו את ההגדרה.

עתה תתפצל ההוכחה לשנים – למקרה שמקיים תנאי 1 במשפט 4.4, ולמקרה בו מתקיים תנאי 2 במשפט 4.4.

נניח שקיים תנאי 1, כלומר T יציבה, ו $|T| < \mu$.
נגדיר באינדוקציה את הסדרה $\langle \tau^i : i < \mu \rangle$ כך ש: $\ell(\tau^i) = i$;
ואם $j < i$ אז $\tau^j = \tau^i | j$; $\mathrm{Rank}(P_{\tau^i}) > \mathrm{Rank}(P_{\tau^{i+1}})$. לאפס
$\tau^0 = \langle\rangle$. לסודר גבולי δ נגדיר את τ^δ כך שלכל $\delta > i$
$\tau^\delta | i = \tau^i$. נותר לנו להגדיר את τ^{i+1}. כיון
ש $P_{\tau^i\frown\langle 0\rangle}$ ו $P_{\tau^i\frown\langle 1\rangle}$ הן הרחבות שונות
של P_{τ^i} ב $S_D(A_{\tau^i\frown\langle 0\rangle})$ לפחות אחת מהן דרגתה קטנה
משל P_{τ^i} והיא תהיה $P_{\tau^{i+1}}$
יוצא ש $\mathrm{Rank}(P_{\tau^i}) < \mathrm{Rank}(P_{\tau^{i+1}})$ ויותר מזה, שאם
$j < i$ אז $\mathrm{Rank}(P_{\tau^j}) < \mathrm{Rank}(P_{\tau^i})$ ולכן יש לנו סדרה
יורדת של דרגות באורך $\mu < |T|$, סתירה.

נעבור למקרה השני – $K_D(2^{(\lambda)}) \le 2^\lambda$ ו $\lambda < \mu$. כיון ש
$P_{\eta^\frown\langle 0\rangle} \ne P_{\eta^\frown\langle 1\rangle}$; $P_{\eta^\frown\langle 0\rangle}, P_{\eta^\frown\langle 1\rangle} \in S_D(A_{\eta^\frown\langle 0\rangle})$ יש קבוצה סופית
$A_{\eta^\frown\langle 0\rangle} \supset B_\eta$ כך ש $P_{\eta^\frown\langle 0\rangle} | B_\eta \ne P_{\eta^\frown\langle 1\rangle} | B_\eta$.
נגדיר $B = \bigcup_{\ell(\eta) < \lambda} B_\eta$.

קל לראות כי $|B| \le |\{\eta : \ell(\eta)<\lambda\}|\cdot \aleph_0 = \Sigma_{i<\lambda} 2^{|i|} = 2^{(\lambda)}$

וכי B הוא מבנה $\mathcal{D}$י. נתון שיש מודל $\mathcal{D}$י הומוגני ב $(\mathcal{D},\mu)-M$

ולא קשה להוכיח שיש העתקה חד-חד-ערכית מ B לתוך M, F

(ראה הערה בסוף ההוכחה) כך שאם $\ell(\eta)=\lambda$ אז $F|[\bigcup_{i<\ell(\eta)} B_\eta]$

הוא שכון אלמנטרי. נסמן $F(p)=\{\psi(x,F(a_0),\dots):\psi(x,a_0,\dots)\in p\}$.

אם $\ell(\eta)=\lambda<\mu$ אז יש אבר ב M שמגשים את $F(p_\eta)$

כי $|A_\eta|<\mu$ ויהי a_η אבר כזה. יהי q_η הטפוס ש a_η

מגשים מעל $F(B)=\{F(b):b\in B\}$. ברור שזה טפוס $\mathcal{D}$י. אם

$\ell(\eta)=\ell(\tau)=\lambda$, $\eta\ne\tau$ יהי i הסודר הראשון כך ש $\eta_i\ne\tau_i$

ואז $p_\eta\restriction(i+1)|B_{\eta|i}\ne p_\tau\restriction(i+1)|B_{\tau|i}$ ולכן $F(p_\eta)$, $F(p_\tau)$

הם טפוסים סותרים, ומכאן נובע ש $q_\eta\ne q_\tau$

ולכן $2^\lambda \ge K_\mathcal{D}(2^{(\lambda)}) \ge K_\mathcal{D}(|B|) > |S_\mathcal{D}(F(B))| \ge |\{q_\eta:\ell(\eta)=\lambda\}| = 2^\lambda$

סתירה. בזה גמרנו את הוכחת מ.ע. 4.5 וכפי שכבר צוין, המשך

ההוכחה כה דומה להוכחת 2.9, שאין טעם להוכיחו שנית.

<u>הערה:</u> למעשה F אינה פונקציה מ B אלא פונקציה שתחומה

$\{(b,\eta): b\in B_\eta, \ell(\eta)<\lambda\}$ כך שלכל $i_1<i_2<\dots<i_n<\ell(\eta)$

ו $b_k\in B_{\eta|i_k}$ $k=1,\dots,n$; $\langle b_1,\dots,b_n\rangle$, $\langle F(b_1,\eta|i_1)\dots\rangle$

מגשימים אותו טפוס.

<u>משפט 4.6:</u> נניח כי $\mathcal{D}$ ו μ,T מקיימת את תנאי משפט 4.4; ו μ

הוא מונה סדיר; $A\supset B$; ו A מבנה $\mathcal{D}$י; $p\in S_\mathcal{D}(B)$;ולכל

$A\supset A_1$, $\mu>|A_1|$ יש מודל $\mathcal{D}$י ההומוגני ב $(\mathcal{D},\mu)$ כך

ש $A_1\cup B\subset M$ ו M משמיט את p אז כל מודל

ראשוני ב $(\mathcal{D},\mu)$ מעל A משמיט את p

<u>הוכחה:</u> כמו הוכחה 2.9.2

<u>מסקנה 4.7:</u> אם מתקיים תנאי משפט 4.4 , $A=B\cup\{b_i:i<\alpha\}$

ו $\{b_i:i<\alpha\}$ קבוצה בלתי מובחנת מעל B ויש מודל $\mathcal{D}$י

הומוגני ב $(\mathcal{D},\mu)$, M ו $B\cup\{b_i:i<\mu\}\subset M$

ו M משמים את $p\in S(B)$ אז כל מודל

ראשוני ב (D,μ) מעל A משמים את

הוכחה: כמו הוכחת 2.12.

משפט 4.8: אם מתקיימים תנאי משפט 4.4 ו $A=B\cup\{b_i : i<\alpha\}$

הוא מבנה Dי, $\{b_i : i<\alpha\}$ היא קבוצה בלתי מובחנת מעל B ו סדיר

ו $q\in S(A)$, ו $Rank(q)=Rank(q|B)$ ו b_i מגשים את

$\mu\le\alpha;\ q_i=q|(B\cup\{b_j : j<i\})$ ו μ סדיר אז בכל מודל

ראשוני ב (D,μ) מעל A q אינו מתגשם.

הוכחה: לפי הגדרת מודל ראשוני, מספיק להוכיח שיש מודל Dי

הומוגני ב (D,μ), M, $M_1, A\subset M$ משמים את q. נניח תחילה כי

$|A|=|\alpha|=|\alpha|^{(M)}$. לפי ההנחות יש מודל ההומוגני ב

(D,μ), M_1, $A\subset M_1$, $\|M_1\|=|\alpha|$ (כי $|A|=|A|^{(M)}$). נגדיר קבוצה

$\{c_i : i<i_0\}$ כך ש: 1) $\{b_i : i<\alpha\}\subset\{c_i : i<i_0\}$ 2) $\{c_i : i<i_0\}$

היא קבוצה בלתי מובחנת מעל B 3) $M_1\supset\{c_i : i<i_0\}$

4) אין קבוצה גדולה יותר המקיימת את כל התנאים הללו. כיון

ש $\{b_i : i<\alpha\}$ מקיימת את 1,2,3 ואחוד של שרשרת עולה של קבוצות

שמקיימות את 1,2,3 גם היא קבוצה שמקיימת את 1,2,3; יש קבוצה

המקיימת את 1,2,3,4, והיא תהיה $\{c_i : i<i_0\}$.

כיון ש $M\supset\{c_i : i<i_0\}$ ברור ש $|\alpha|=|\{b_i : i<\alpha\}|\le|\{c_i : i<i_0\}|\le\|M_1\|\le|\alpha|$,

לכן קיימת פונקציה F מ $A=B\cup\{b_i : i<\alpha\}$ על $A'=B\cup\{c_i : i<i_0\}$

שהיא הזהות על A. כיון ש $\{c_i : i<i_0\}$ היא קבוצה בלתי מובחנת

מעל B המקיפה את $\{b_i : i<\alpha\}$ ברור שזו העתקה אלמנטרית.

יהי q', $q'\in S_D(A')$ הטפוס אליו מעבירה F את q ז.א.

$$q'=\{\psi(x,F(a_0),\dots) : \psi(x,a_0,\dots)\in q\}$$

קל לראות שיש מודל ההומוגני ב (D,μ) והמקיף את A בו q אינו

מתגשם אםם יש מודל ההומוגני ב (D,μ) המקיף את A' בו q' אינו

מתגשם. אך קל לראות שאם יש ב M_1 אבר c המגשים את q', אז
$\{c_i : i<i_0\}\cup\{c\}$ מקיימת את 1,2,3 בסתירה להגדרת $\{c_i : i<i_0\}$
ולכן q^0 אינו מתגשם. יוצא שהוכחנו שאם $|A|=|\alpha|=|\alpha|^{(\mu)}$
אז אינו מתגשם. נוכיח את המסקנה בלי תנאי זה. נגדיר באופן
הטבעי את המבנה $A_1=B\cup\{b_i : i<(|B|+\alpha)^{\mu}\}$. לפי מה שהראנו קודם
יוצא שההרחבה שות הדרגה של q ב $S_D(A_1)$ אינה מתגשמת בכל מודל
Dי ראשוני והומוגני ב (D,μ) מעל A_1. נניח ש q מתגשם במודל
ראשוני ב (D,μ) מעל A ולכן בכל מודל מסוג זה, ולכן גם במודל
מהצורה שבנינו ב 4.4. לכן יש סדרת אברים $\langle a_i : i<\beta\rangle$
וטפוסים $p(a_i)$ כך ש $p(a_i)\in S_D(A\cup\{a_j : j<i\})$, ו $p(a_i)$
בדוד (D,μ). מכאן יוצא, כמו בהוכחת 2.9.2 שאם יש אבר a_k
שמגשים את q אז יש $A\supset A'$, $\mu>|A'|$ וסדרה $\langle a_{j_i} : i\le i^0\rangle$
כך ש $p(a_{j_i})|(A\cup\{a_{j_l} : l<i\})$ הוא ההרחבה היחידה של
$p(a_{j_i})|(A^0\cup\{a_{j_l} : l<i\})$ ב $S_D(A\cup\{a_{j_l} : l<i\})$
וכן $a_{j_0}=a_k$. כיון ש $\{b_i : i<\alpha\}$ היא קבוצה בלתי
מובחנת מעל B נניח, ב.ה.כ. שיש $\mu>\alpha_0$ כך
ש $A^0\subset B\cup\{b_i : i<\alpha_0\}$. אפשר להראות באינדוקציה על $i^0\ge l$
כי $\{b_i : \alpha_0\le i<\alpha\}$ היא קבוצה בלתי מובחנת מעל $B\cup\{b_i : i<\alpha_0\}\cup\{a_{j_i} : i<l\}$
(ל $l=0$ ו l גבולי זה מידי. ל $l+1$ זה נובע מכך
ש $p(a_{j_l})$ הוא טפוס בדוד (D,μ) ומכאן שאילו היינו חוזרים
על אותה בניה מעל A_1 היה יוצא שבמודל ראשוני ב (D,μ)
מעל A_1 ההרחבה שות הדרגה של q ב $S_D(A_1)$ מתגשמת,
בסתירה למה שהוכחנו קודם, ובזה נסתיימה ההוכחה.

נטפל עתה בתורות שיש להן מודלים הומוגניים בלבד בעוצמה
מסוימת הגדולה מעוצמת התורות.

<u>משפט 4.9:</u> אם לתורה T יש מודלים בלבד בעוצמה λ, $\lambda > |T|$ אז

1) ל T יש מודלים הומוגניים בלבד בכל עוצמה $\beth((2^{|T|})^+ \times \alpha)$ ל $0<\alpha$

2) T חורה על יציבה.

<u>הוכחה:</u> חלק 1 נובע מהמשפטים 3.1 3.2.2.

כיון שכל שני מודלים שוי עוצמה שוי דיאגרמה סופית והומוגניים הם איזומורפיים, (זה הוכח ב[8] ע"י Keisler & Morley

ומספר הדיאגרמות הסופיות של מודלים של T אינו עולה על $2^{2^{|T|}}$

הרי בכל עוצמה $\beth((2^{|T|})^+ \alpha)$ ל T אין יותר מ $2^{2^{|T|}}$ מודלים

לא איזומורפיים לכן, לפי משפט 3.6.2 T על יציבה.

<u>משפט 4.10:</u> אם לתורה T יש מודלים הומוגניים בלבד בעוצמה $|T| < \mu$ ויש לה מודל D הומוגני ב $(D,|T|^+)$ שאינו הומוגני, ועוצמתו λ, אז $2^{|T|} \geq \lambda$ ובעוצמה λ יש ל T מודל שאינו הומוגני ב $|T|^{++}$ וההומוגני ב $|T|^+$

<u>הוכחה:</u> נניח כי M הוא המודל. כיון שהוא אינו הומוגני יש $A \subset M$, $\|M\| > |A|$ ו $p \in S_D(A)$, p ו p אינו מתגשם. אם יש ב M קבוצה בלתי מובחנת $\{a_i : i < |T|^+\}$ מעל A נגדיר באופן הטבעי את המבנה $A \cup \{a_i : i < \beth_\alpha\}$ כך ש $\|M\| < \beth_\alpha$ $(2^{|T|})^+ | \alpha$, לפי מסקנה 4.7, ומשפט 4:4 יש מודל ראשוני ב $(D,|T|^+)$ מעל $A \cup \{a_i : i < \beth_\alpha\}$, M_1, כך ש M_1 משמיט את p. יוצא שקבלנו מודל D הומוגני ב $(D,|T|^+)$ שאינו הומוגני ב $|A|^+$ ו $\beth_\alpha > \|M\| \geq |A|^+$ ועוצמת מודל זה $\leq \beth_\alpha$ ולכן יש ב $\beth_\alpha$ מודל לא הומוגני של T בנגוד ל 4.9.1. לכן אין מעל A קבוצה בלתי מובחנת שעוצמתה $|T| <$. כיון ש T על יציבה, לכל $\lambda \geq 2^{|T|}$ $K_T(\lambda) = \lambda^+$

ולכן לפי משפט 2.6 אם $\|M\| > 2^{|T|}$ אז יש קבוצה כזאת, סתירה.

לכן $\|M\| \geq 2^{|T|}$,

ובאופן דומה אין λ, $\|M\| > \lambda \geq |A|$, $K_T(\lambda) \in \lambda^+$.

יהי M_1 מודל רווי של T בעוצמה $(2^{|T|})^+$ (יש כזה לפי משפט 3.3 כיון ש T על יציבה). יהי $A^1 \subset M_1$ $2^{|T|} = |A_1|$
לפי 2.6 יש ב M_1 קבוצה בלתי מובחנת מעל A^1, $\{a_i : i < (2^{|T|})^+\}$,
יהי $D_1 = D(M_1)$ ו M_2 מודל פ' ראשוני $(D_1, |T|^+)$
מעל $\{a_i : i < |T|^+\}$ ברור שזהו מודל רווי $|T|^+$ ולכן
$|A| \leq |T| \Rightarrow |S(A)| \leq \|M_2\|$ ולכן $K_T(|T|) \leq \|M_2\|^+$.
ולכן לפי 1.2 $K_T(\|M_2\|) \leq \|M_2\|^+$ ו $\|M_2\| \leq \lambda \Rightarrow \lambda^+ = K_T(\lambda)$.
לכן לפי הקטע הקודם, $\|M\| \leq \|M_2\|$.
מצד שני, לפי משפט 4.8, M_2 איננו הומוגני ב $|T|^{++}$ ולכן
בכל עוצמה $\mu \geq \|M_2\|, > |T|^+$ יש ל T מודל שאיננו הומוגני ב $|T|^{++}$
או בכל μ, $|T|^+ < \mu \leq \|M_2\|$ יש ל T מודל לא הומוגני. כמו
כן הוכחנו שבכל עוצמה $> \|M_2\|$ אין ל T מודל לא הומוגני
והומוגני ב $|T|^+$

<u>משפט 4.11:</u> אם לתורה T יש רק מודלים הומוגניים בעוצמה $\lambda > |T|$ אז מתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות:

1) יש $\mu < \mu(|T|)$ כך שבכל עוצמה $\geq \mu$ יש ל T מודלים הומוגניים בלבד, ובכל עוצמה $< \mu$ ו $> |T|$ יש ל T מודל לא הומוגני.

2) יש $\mu \leq (2^{|T|})^+$ כך שבכל עוצמה $\geq \mu$ וב $|T|^+$ יש ל T מודלים הומוגניים בלבד, ובכל עוצמה $< \mu$ ו $> |T|^+$ יש ל מודל לא הומוגני. אם $|T| = \aleph_0$ אז $\mu = |T|^+$ —

<u>הוכחה:</u> נניח תחילה שב $|T|^+$ יש ל T מודלים הומוגניים בלבד. אם $|T| = \aleph_0$ אז ב Keisler [6] הוכח כי ל T יש מודלים הומוגניים בלבד בכל עוצמה $> \aleph_0$ ובזה הוכח המשפט. בכל מקרה

אין ל T מודלים בעוצמה $>|T|$ שאינם הומוגניים ב $|T|^+$ ולכן
לפי 4.10 אם יש ל T מודל לא הומוגני בעוצמה λ אז $\lambda \geq 2^{|T|}$
ויש לה בעוצמה זו מודל שאינו הומוגני ב $|T|^+$ ולכן בכל עוצמה
$\lambda \geq$ ו $>|T|^+$ יש ל T מודל לא הומוגני, ולכן מתקיימת
האפשרות השניה.

נניח עתה כי ב $|T|^+$ יש ל T מודל לא הומוגני. נראה שאם
$|T| < \lambda_1 < \lambda_2$ וב λ_2 יש ל T מודל לא הומוגני, אז יש
ל T מודל לא הומוגני ב λ_1. אם $\lambda_1 = |T|^+$ הדבר ברור, וכן
אם יש ל T מודל ב λ_2 שאינו הומוגני ב $|T|^+$
נותר המקרה בו יש ל T מודל הומוגני ב $|T|^+$ ולא הומוגני
ב λ_2 ו $|T|^+ < \lambda_1$ אז אף המסקנה נובעת מ 4.10. נניח ש μ היא
העוצמה הראשונה $> |T|$ בה יש ל T מודלים הומוגניים בלבד.
אם $2^{|T|} < \mu$ אז ברור שבכל עוצמה $\varkappa$ $\mu > \varkappa > 2^{|T|}$
יש ל T מודל שאינו הומוגני ב $|T|^+$ ולכן, כמו ב3.8
$\mu(|T|) > \mu$. כיון ש $\mu(|T|) > 2^{|T|}$ קיימת במקרה זה האפשרות
הראשונה, ובזה נסתיימה הוכחת המשפט.

<u>הערה</u> אם $|T| = \aleph_0$ אפשר להוכיח ש $\beth_\omega \geq \mu$

פרק 5

קטגוריות של תורות בשפה $L(Q_{eq})$

L תהיה שפה קבועה מסדר ראשון, ו $L(Q_{eq})$ אותה שפה,
אך בהגדרת הנוסחות נוסיף הכמת $(QX)\psi=(Q_{eq}X)\psi$ ובהגדרת הספיקות
של נוסחה במודל M נגדיר $M\models(Qx)\psi(x,\bar a) \Leftrightarrow |\{b: M\models\psi[b,\bar a]\}|=\|M\|$
שפית דומות הוגדרו ב Fuhrken [4]

מטרתנו בפרק זה תהיה להוכיח שאם תורה שלמה $\bar T$ ב $L(Q_{eq})$
קטגורית בעוצמה אחת $>|\bar T|$ אז היא קטגורית בעוד עוצמות.
המסקנה העיקרית היא -

<u>משפט 5.16:</u> אם תורה שלמה $\bar T$ ב $L(Q_{eq})$ קטגורית בעוצמה
הגדולה ביחס ל $\aleph_0$ (ז.א. אם $\lambda>\lambda_i$ $\omega>i$ אז $\lambda>\prod_{i<\omega}\lambda_i$) או λ
מהצורה $\beth_\delta$;ו $|\bar T|<2^{\aleph_0}$, $(2^{|T|})^+<\lambda$
אז $\bar T$ קטגורית בכל עוצמה הגדולה מ $|\bar T|$

בפרק זה $\bar T$ תסמן תורה שלמה ב $L(Q_{eq})$
ו $T=\{\psi:\psi\in\bar T,\ \psi\in L\}$ נניח שב $\bar T$ לכל נוסחה $\psi(\bar x)$
יש פרדיקט $R_\psi(\bar x)$ כך ש $(\forall\bar x)[\psi(\bar x)\equiv R_\psi(\bar x)]\in\bar T$. הנחה זו
אינה משפיעה למעשה על המשפטים, שכן תמיד אפשר להרחיב את התורה
לתורה כזו, מבלי שמספר המודלים של התורה בכל עוצמה ישתנה.
(ראה Morley [9]). כשנדבר על מבנה בפרק זה נתכוון למבנה T'
כמו כן באומרנו שמודל של $\bar T$ הוא רווי ב λ הכוונה היא
שהוא רווי כמודל של T

<u>הגדרה 5.1:</u> (1 $\bar T$ קטגורית ב λ אם כל מודליה שעוצמתם λ
איזומורפיים ויש לה לפחות מודל אחד בעוצמה זו.

אנו נשתמש בכמה משפטים שלא יוכחו כאן, והם יבואו בתחילת
הפרק.

<u>הגדרה 5.2:</u> מונה λ גדול ביחס למונה μ אם: לכל $i<\mu$, $\mu_i<\lambda$ מתקיים $\lambda > \prod_{i<\mu}\lambda_i$. במקרה זה יוצא שקיים λ^{μ} ו $cf\,\lambda=\mu$

<u>משפט 5.1:</u> 1) אם λ גדול ביחס ל μ ו D על מסנן מעל μ ו M מודל של T ו $\|M\|=\lambda$ גדול ביחס ל μ אז M^{μ}/D גם הוא מודל של T ויש שכון אלמנטרי של M ב M^{μ}/D ($a \to \langle a, \dots \rangle / D$) אנו נזהה את אברי M עם תמונותיהם בשכון הנ"ל.

<u>הוכחה:</u> ראה ב [4]

<u>משפט 5.2</u> אם $\langle M_i : i<\mu \rangle$ היא שרשרת אלמנטרית של מודלים של T (ז.א. M_{i+1} הוא הרחבה אלמנטרית של M_i ו $M_\delta=\bigcup_{i<\delta} M_i$) ו $\|M_i\|=\lambda$ לכל $i<\mu$ ו $cf\,\lambda > \mu$ אז $\bigcup_{i<\mu} M_i$ הוא מודל של T והרחבה אלמנטרית של כל M_i.

<u>הוכחה:</u> מידית.

<u>משפט 5.3:</u> יהי M מודל של T ו $\|M\|$ גדול ביחס ל $|I|$ ו D על מסנן מעל I ו $M_0=M$, $M_\delta=\bigcup_{i<\delta} M_i$, ו $M_{i+1}=M_i{}^{I}/D$ אז:

1) M_1 הוא רווי ב $\aleph_1$

2) אם T איננה על יציבה, אז M_ω איננו רווי ב $\aleph_1$

<u>הוכחה:</u> תופיע ב [15]

<u>משפט 5.4</u> אם T קטגורית ב λ ו λ גדול ביחס ל $\aleph_0$ אז T היא על יציבה.

<u>הוכחה:</u> נניח ש T איננה על יציבה, ויהי M המודל של T ב λ. לפי 5.3.1 יש ל T מודל ב λ שהוא רווי ב $\aleph_1$

ולפי 5.3.2 יש ל $\bar{T}$ מודל ב λ שאינו רווי ב $\aleph_1$, סתירה.

לכן $\bar{T}$ היא על יציבה.

הערה: משפט זה נכון גם אם $\mathcal{L}C(\bar{T}_1,\bar{T})$ קטגוריות ב λ .

הגדרה 1.3: $SG(A)=\{p\in S(A): \psi(x,\bar{a})\in p \Rightarrow \models \neg(Qx)\neg\psi(x,\bar{a})\}$

או, מה ששקול לזה:

$$p\in SG(A) \Leftrightarrow p\in S(A),\ p\supset G(A)=\{\psi(x,\bar{a}): \models\neg(Qx)\neg\psi(x,\bar{a})\}$$

טפוס המוקף ע"י טפוס ב $SG(A)$ יקרא גדול.

טענה 5.5: אם ל $\bar{T}$ יש מודל בעוצמה אינסופית λ ו p טפוס מעל A ולכל $\varphi_1,\dots,\varphi_m\in p$ קיים $(Qx)\bigwedge_{i=1}^{m}\varphi_i$
אז יש ל p הרחבה ב $SG(A)$

הוכחה: כיון שכל הרחבה של $p\cup G(A)$ ב $S(A)$ היא הרחבה של p הנמצאת ב $SG(A)$ מספיק להראות ש $p\cup G(A)$ הסרת סתירה. אם יש סתירה, אז קיימים $\varphi_0,\dots,\varphi_n\in p$, $\psi_0(x,\bar{a}_0),\dots,\psi_m(x,\bar{a}_m)\in G(A)$ כך שיש ב $\{\psi_j(x,\bar{a}_j),\varphi_i : j\le m,\ i\le n\}$ סתירה.

נגדיר $\varphi=\bigwedge_{i<n}\varphi_i=\varphi(x,\bar{a})$. כיון ש p גדול

וכן $\models\neg(\exists x)\left(\varphi(x,\bar{a})\wedge\bigwedge_{i=0}^{m}\psi_i(x,\bar{a}_i)\right)$

ונזכור $i\le m \Rightarrow \models\neg(Qx)\neg\psi(x,a_i)$

לכן $$\models(\exists\bar{y};\bar{y}_0,\dots,\bar{y}_m)\Big[(Qx)\varphi(x,\bar{y})\wedge\bigwedge_{i=0}^{m}\neg(Qx)\neg\psi(x,\bar{y}_i)\wedge(\forall x)\big(\neg\varphi(x,\bar{y})\vee \bigvee_{i=0}^{m}\neg\psi(x,\bar{y}_i)\big)\Big]$$

כלומר פסוק זה שייך ל $\bar{T}$. כיון שיש ל $\bar{T}$ מודל בעוצמה אינסופית λ , יוצא שיש $m+2$ עוצמות $<\lambda$ שסכומן λ סתירה.

<u>טענה 5.6</u> אם ל $\bar{T}$ יש מודל אינסופי בעוצמה סדירה λ ו T יציבה ו $p\in SG(A)$, $\bar{a}\in A$, $\models\neg(Qx)\psi(x,\bar{a})$ ו, $R_0,\dots,R_n$ פרדיקטים ב L אז הפסוק האומר – "קבוצת האברים המקיימים

מעל $\{x: R(x,\bar{a})\}$ אותו טפוס Iי כמו x עוצמתה λ

כש $I=\{R_1,---,R_m\}$ שייך ל p"

<u>הערה</u> הפסוק הוא:

$$(Qy)(\forall z_0,---,z_m)\Big[\bigwedge_{i\le m} R(z_i,\bar{a}) \to \bigwedge_{j=1}^{n}\big[R_j(x,z_1,---)\equiv R_j(x,z_1,---)\big]\Big]$$

<u>הוכחה:</u> במודל בעוצמה λ של $\bar{T}$ מעל כל קבוצה B, $\lambda>|B|$

מתגשמים $<\lambda$ טפוסים Iיים (כי T יציבה ולכן

$$|S_I(A)|\le \prod_{i=1}^{n}|S_{R_i}(A)| = |A|^m = |A|<\lambda$$

לכן מספר האברים שמגשימים, מעל B, טפוס שמתגשם $<\lambda$ הוא

קטן מ λ, ומכאן יוצאת מיד המסקנה.

<u>הגדרה 5.4:</u> $K(\lambda,\mu)=K_{\bar{T}}(\lambda,\mu)$ תהיה מחלקת המודלים

של $\bar{T}$ בעוצמה λ שהם רוויים ב μ וכל טפוס גדול בעוצמה $<\mu$

מעל המודל מתגשם בהם λ פעמים.

<u>משפט 5.7:</u> אם $\bar{T}$ יציבה ויש לה מודל בעוצמה סדירה; $\mu, |T|<\mu$ סדיר נ μ

סדיר ו $\lambda=\lambda_1^+$ ו $K_T(\lambda_1)=\lambda$ או λ_i היא סדרה העולה ל λ

ו $K_T(\lambda_i)=\lambda_i^+$ אז מעל כל מבנה A, $\lambda>|A|$. יש מודל

ראשוני ב $K(\lambda,\mu)$ מעל A אם $|T|<\mu$ או $K_T(2^{\mu})\le 2^{\mu}$

<u>הגדרה 5.5:</u> טפוס P, $p\in SG(A)$ יקרא בדוד (G,μ) אם יש

$P\supset P_1$, $\mu>|P_1|$ כך ש P היא ההרחבה היחידה של P_1

ב $SG(A)$.

<u>משפט עזר 5.8:</u> בתנאי המשפט יהי A מבנה ו p טפוס גדול מעל

A שעוצמתו $<\mu$ אז יש ל p הרחבה בדודה μ ב $SG(A)$

<u>הוכחה:</u> נגדיר באינדוקציה את P_i: $P_0=P$, לסודרים גבוליים

$P_\delta=\bigcup_{i<\delta}P_i$ (ברור שאחוד סדרה עולה של טפוסים גדולים

הוא טפוס גדול.)

ם ל P_i יש הרחבה קטנת דרגה ב $SG(A)$ אז יש $P_i \subset P_{i+1}$, $|P_{i+1}| \le |P_i|+1$

$Rank(P_{i+1}) < Rank(P_i)$ ו P_{i+1} טפוס גדול. כיון שאין סדרה יורדת

אורך $|T|^+$ של דרגות, יש $i < |T|^+$ כך שאין ל p_i הרחבה קטנת

רגה ב $SG(A)$ אך יש לו הרחבה ב $SG(A)$ (לפי משפט 5.5), והרחבה זו

יא הטפוס המבוקש.

<u>משפט עזר 5.9</u> בתנאי המשפט, אם $A \subset A_1$, $\lambda > |A_1|$ ו p

טפוס בדוד (G,μ) , $p \in SG(A)$ אז p מתגשם בכל מודל ב $K(\lambda,\mu)$

המקיף את A_1 לכן אם a מגשים את p אז $A_1 \cup \{a\}$ הוא מבנה

ראשוני ב $K(\lambda,\mu)$ מעל A_1

<u>הוכחה:</u> נניח ש $p \supset p_1$, $\mu > |p_1|$ ו p הוא ההרחבה היחידה של

p_1 ב $SG(A)$. לפי נתוני המשפט יוצא ש $\lambda > |S(A_1)|$.

נניח ש $A \subset M$ ו $M \in K(\lambda,\mu)$. ברור שאם $p_1 \subset q \in S(A)$

ו $q \notin SG(A)$ אז לפי הגדרת $SG(A)$ q מתגשם $< \lambda$ פעמים,

ולכן p מתגשם ב M וזה מה שרצינו להוכיח.

<u>הערה 5.7:</u> לא קשה להראות שקיימת סדרת מודלים $\langle M_i : i < \lambda \rangle$ של T

כך שיתקיימו התנאים הבאים:

1) אם $j < i$ אז M_i הוא הרחבה אלמנטרית של M_j

2) כל M_i הוא מודל רווי μ

3) $\lambda > i$ $\|M_i\|$ ו $K_T(|i|+\mu) > \|M_i\|$

4) M_0 הוא מודל ראשוני רווי μ מעל A מהצורה

המתוארת במשפט 2.9

5) M_δ הוא מודל ראשוני רווי μ מעל $\bigcup_{i<\delta} M_i$ מהצורה

המתוארת במשפט 2.9.

6) M_{i+1} הוא מודל ראשוני רווי μ מעל $|M_i| \cup \{b_i\}$

כש b_i מגשים טפוס בדוד (G,μ) ב $SG(|M_i|)$ שנסמנו P_i^1

7) אם p הוא טפוס גדול שעוצמתו קטנה מ μ מעל M_i

אז יש λ p_i^1ים שהם הרחבות של p

קל לראות שהבניה אפשרית.

ברור ש $M_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} M_i$ הוא מודל של T, שהוא רווי μ, שכל טפוס גדול שעוצמתו $<\mu$ מתגשם בו λ פעמים, שהוא הרחבה אלמנטרית של כל M_i וכן שהוא מבנה ראשוני מעל A_1 ב $K(\lambda,\mu)$

לכן בשביל 5.7.1 נותר להוכיח רק ש M_λ הוא מודל של $\bar{T}$

ולשם כך נותר רק להוכיח שאם $M_\lambda \models \neg(Qx)\psi(x,\bar{a})$

אז $|\psi(M_\lambda,\bar{a})|<\lambda$. כיון ש $\bar{a}\in M_\lambda$ ברור שיש

$\lambda>k$ כך ש $\bar{a}\in |M_k|$. ברור שמספיק להוכיח כי

$\psi(M_\lambda,\bar{a})\subset |M_k|$. לפי הבניה של M_λ אפשר לכתוב

$$|M_\lambda| = |M_k| \cup \{a_i : i<\lambda\}$$

כך ש 1) לכל $k<j$ יש $\lambda>i_j$ כך ש $|M_j| = |M_k| \cup \{a_i : i<i_j\}$, $b_j = a_{i_j}$

2) לכל ℓ מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

א) a_ℓ מגשים טפוס בדוד μ מעל $|M_k|\cup\{a_i : i<\ell\}$, p_ℓ

ו $q_\ell \subset p_\ell$, $\mu>|q_\ell|$ ו p_ℓ הוא ההרחבה היחידה של q_ℓ
ב $S(|M_k|\cup\{a_i : i<\ell\})$

ב) יש j כך ש $\ell = i_j$ ו $a_\ell = b_j$ ו a_ℓ מגשים טפוס בדוד

(G,μ) ב $SG(|M_k|\cup\{a_i : i<\ell\})$ שנסמנו ב p_ℓ

ו $p_\ell \supset q_\ell$, $\mu>|q_\ell|$ ו p_ℓ הוא ההרחבה היחידה של q_ℓ
ב $SG(|M_k|\cup\{a_i : i<\ell\}$

נניח ש a_{ℓ_0} הוא הראשון המקיים $\psi[a_{\ell_0},\bar{a}]$

נגיע לסתירה דבזה נוכיח את 5.7.1.

נגדיר באינדוקציה את $M_\lambda \supset A_n$ כך:

Sh:E75

$A_0=\{a_{\ell_0}\}$

A_{n+1} זו הרחבה של A_n כך שאם $a_i\in A_n$ אז q_i

הוא ספוס מעל A_{n+1} ו $|A_{n+1}|<\mu$

נגדיר $A_\omega=\bigcup_{n<\omega}A_n$

נסמן $C_\ell=|M_h|\cup\{a_i: i<\ell\}$ נראה שבמקרה זה אפשר להרחיב

את פונקצית הזהות של $\psi(M_h,\bar{a})$ לשכון F של $\psi(M_h,\bar{a})\cup A_\omega$

לתוך M_h. כיון ש $\models\psi[a_{\ell_0},\bar{a}]$ $a_{\ell_0}\in A_\omega$ ו $b\neq F(a_{\ell_0})$ $\Rightarrow$ $b\in M_h,\models\psi[b,\bar{a}]$

נגיע לסתירה:

נגדיר באינדוקציה סדרה עולה של שכונים, F_ℓ $\lambda>\ell$ לתוך M_h

כך שתחום F_ℓ יהיה $\psi(M_h,\bar{a})\cup(C_\ell\cap A_\omega)$. ברור ש F_λ יהיה

השכון המבוקש. F_0 יהיה הזהות. $F_\delta=\bigcup_{i<\delta}F_i$ ואם

$a_\ell\notin A_\omega$ אז $F_{\ell+1}=F_\ell$. אם F_ℓ מוגדר, $a_\ell\in A_\omega$

נותר לנו להגדיר רק את $F_{\ell+1}(a_\ell)$. אם $(\forall j)(\ell\neq i_j)$ ברור

שאפשר להגדיר אותו. נניח ש $\ell=i_j$. ברור שיש

ספוס $\bar{p}$, $|\bar{p}|<\mu$ שהוא ספוס מעל טורה F_ℓ כך שאם $F_{\ell+1}(a_\ell)$

יגשים מעל טורה F_ℓ ספוס גדול שמרחיב את $\bar{p}$ ו $F_{\ell+1}(a_\ell)\in M_h$

אז $F_{\ell+1}$ יהיה השכון האלמנטרי הדרוש. לכן מספיק להראות שיש

ספוס $\bar{p}^1$ מעל טורה F_ℓ, $\mu>|\bar{p}^1|$ כך ש $p\subset\bar{p}^1$

וכל הרחבה שלו שהיא ספוס מעל טורה F_ℓ הוא ספוס גדול. קל לראות ש

$$\bar{p}^1=\bar{p}\cup\Big\{(\forall y_1\cdots)\big[\bigwedge_\ell\psi(y_\ell,\bar{a})\wedge\varphi(x,y_1,\ldots,\bar{c})\to\overset{(\exists x)}{\varphi}(x,y_1,\ldots,\bar{c})\big]:\ \bar{c}\in F(A_\omega)\ \text{סדרה}\ \varphi\in L,\ \text{נוסחה}\ \varphi\Big\}$$

מקיים את התנאים ולכן בזה המשפט הוכח

מסקנה 5.7.2 אם תנאי 5.7.1 מתקיימים, ל μ, λ_1 ; $\lambda_2\geq\mu$

ויש מודל ב $K(\lambda_2,\mu)$ המקיף את A ומשמיט את p, $p\in S(A)$

אז כל מודל ראשוני מעל A ב $K(\lambda_1,\mu)$ משמיט את p

הוכחה: דומה להוכחה 5.7.1.

משפט 5.10: אם $\bar{T}$ קטגורית במונה סדיר λ, $\lambda > (2^{|T|})^+$ ו λ

גדול ביחס ל $\aleph_0$ אז $\bar{T}$ מקיימת את התנאי הבא:

(5.10*) לכל פרדיקט $R(x,\bar{y})$ יש $n < \omega$ כך ש

$$(\forall \bar{y})\left[(\exists x_0,\dots,x_n)\left(\bigwedge_{i\neq j;\, i,j\le n} x_i\neq x_j \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} R(x_i,\bar{y})\right)\to (Qx)R(x,\bar{y})\right] \in \bar{T}$$

הוכחה: נניח ש $R(x,\bar{y})$ מפריך את (5.10*). יהי M המודל של

$\bar{T}$ בעוצמה λ. במקרה זה לכל n יש $\bar{a}^n$ כך ש

$$\lambda > |\psi(M,\bar{a}^n)| \ge n$$

קל לראות מכאן שאם D הוא על מסנן לא ראשי מעל ω אז

ב $M_0 = M^\omega/D$ יש $\bar{a}$ כך ש $\lambda > |\psi(M,\bar{a})| \ge \aleph_0$

ולפי 5.1 M_0 הוא מודל של $\bar{T}$ בעוצמה λ. נגדיר

באינדוקציה את M_i: $M_{i+1} = M_i^\omega/D$ ו $M_\delta = \bigcup_{i<\delta} M_i$

לפי 1.1 1.2 , M_γ $(\gamma = (2^{|T|})^+)$ הוא מודל של $\bar{T}$

וקל לראות שאין ב M_γ $\bar{a}$ כך ש $\aleph_0 \le |\psi(M_\gamma \bar{a})| \le 2^{|T|}$

מצד שני, כיון ש T על יציבה (לפי 5.4) קיים $M^+ = K_T(M)$

לכל $2^{|T|} \le \mu$ לכן יש ל T מודל רווי $|T|^+$,

M^0 בעוצמה $2^{|T|}$ וברור לפי מה שהוכחנו קודם שיש

ב M^0 סדרה $\bar{c}$ כך ש $M^0 \models \neg(Qx)\psi(x,\bar{c})$.

ו $|T|^+ \le |\psi(M^0,\bar{c})| \le 2^{|T|}$. לפי 5.7 יש ל M^0 הרחבה M^1

שהיא מודל של $\bar{T}$ בעוצמה λ ו $\psi(M^0,\bar{c}) = \psi(M^1,\bar{c})$

לכן $|T|^+ \le |\psi(M^1,\bar{c})| \le 2^{|T|}$

לכן M^1 ו M_γ הם מודלים לא איזומורפיים של $\bar{T}$ ב λ,

סתירה. ובזה הוכח המשפט.

הערה: ב 5.10 בתנאים מסוימים אפשר להחליף את התנאי $(2^{|T|})^+ < \lambda$

ב $|T|^+ < \lambda$. נסקור את ההוכחה.

הגדרה: נגדיר מתי מונה בלתי נשיג יקרא מונה מסדר

כל מונה בלתי נשיג בחזק הוא מונה מסדר 0

מונה λ יקרא מונה מסדר n אם כל פונקציה מונוטונית עולה (ממש) מ λ ל λ, f שהיא רציפה ($f(\delta)=\bigcup_{i<\delta} f(i)$ ז.א.) יש לה נקודת שבת מסדר $n-1$

הערה: הגדרה זו נלקחה מ Gaifman [6].

משפט: אם לכל $n<\omega$ יש לכל תת קבוצה סופית של $\bar{T}$ מודל M במונה מסדר n בו $\aleph_0 \le |Q(M)| < \|M\|$ אז לכל λ, $|T| \le \mu < \lambda$ יש ל $\bar{T}$ מודל N שעוצמתו λ ו $|Q(N)|=\mu$

הערה משפט דומה מופיע ב Helling [2] אך שם ל $\bar{T}$ יש מודל בעוצמה דחוסה בחלש

הוכחה: לא תובא כאן. המשפט מופיע ב [14] Schmerl & Shelah

הנחה: לכל $n<\omega$ יש מונה מסדר n, λ_n.

על סמך הנחה זו נוכל להוכיח את 5.10, גם התנאי המוחלש

הוכחה: לפי מה שהוכחנו קודם נוכל למצא מבנה A, כך שבו תהיה סדרה $\bar{a}$ ואברים b_i כך ש $i<j<\omega \Rightarrow b_i \ne b_j$ ו $\models R[b_i,\bar{a}]$ ו $\models \neg(Qx)\psi(x,\bar{a})$ וגם ל $\bar{T}(A)$ יש מודל ב λ.

לפי 5.7 לכל תת תורה שלמה בעוצמה $\aleph_0$ של $\bar{T}$ יש מודל ב λ_n, M_n ו $|\psi(M_n,\bar{a})| < \lambda_n$. לכן לפי המשפט הקודם, יש ל $\bar{T}$ מודל M' בעוצמה λ כך ש $\aleph_0 \le |\psi(M',\bar{a})| \le |\bar{T}|$. מצד שני אפשר לבנות כמו בהוכחה הקודמת מודל M_γ כש $\gamma=|T|^+$ שלא יהיה בו $\bar{a}$ כזה.

סתירה, ולכן תנאי (*5.10) מתקיים.

מסקנה 5.11: אם $\bar{T}$ קטגורית ב λ, $\lambda > |T|$, $\lambda \ne \varkappa(|\bar{T}|)$ ו $\bar{T}$ מקיימת את תנאי (*5.10) אז

1) כל מודל רדוי של T הוא מודל של $\bar{T}$

2) יש תורה $T \subset T_1$, $|T_1|=|T|$ כך שמודלי $\bar{T}$ הם בדיוק המודלים ב $PC(T_1,T)$. (לכל $R(x,\bar{y})$ נוסיף פונקציה חד ערכית

$F(z,\bar{y})$ מהמודל לתוך ($\{x: R(x,\bar{y}) \vee \neg(Qz)R(z,\bar{y})\}$

3) לכל $|T| \leq \mu$, $K_T(\mu)=\mu^+$ (לפי משפט 3.7.2) ולכן

ל T יש מודל רווי בכל עוצמה $\leq |T|$ ו $\bar{T}$ איננה קסבורית

בדיוק בעוצמות בהן יש לה מודל לא רווי.

4) $\bar{T}$ קסבורית בכל עוצמה $\beth(\gamma \times \alpha)$ כש $\rho < \alpha$ $\gamma=(2^{|T|})^+$

(לפי 3.7.1)

<u>משפט 5.12:</u> בתנאי 5.11, אם $\bar{T}$ איננה קסבורית ב λ_1 ו $\mu=|T|^+$

או $2^{\mu} \geq K_T(2^{(\mu)})$ ו μ מונה סדיר, אז

1) ל $\bar{T}$ יש מודל ב λ_1 שאיננו רווי ב μ

או 2) ל $\bar{T}$ יש מודל בעוצמה λ_1 הרווי ב μ שבו יש ספוס גדול

שעוצמתו $< \mu$ ומתגשם $< \lambda$ פעמים.

<u>הוכחה:</u> אם המשפט איננו מתקיים יש ל $\bar{T}$ מודל M ב λ_1

שהוא רווי μ, כל ספוס גדול p, $\mu > |p|$ מתגשם λ_1 פעמים, ו M

איננו רווי, ז.א. יש p, $M \supset A$, $|A|$, λ, $p \in S(A)$ שאיננו מתגשם. יהי

$|A| < \lambda_2$ ו $\lambda_2=\beth((2^{|T|})^+ \times \alpha)$. לפי 5.7.2 המודל הראשוני

ב $K(\lambda_2,\mu)$ מעל A איננו מגשים את p ולכן יש ל $\bar{T}$

מודל לא רווי ב λ_2, אך לפי 5.11.4 $\bar{T}$ קסבורית ב λ_2.

סתירה, והמשפט הוכח.

<u>הערה:</u> במשפט 5.12 מקרה 2 הוא בלתי אפשרי. לא הצלחתי להוכיח

או להפריך את ההשערה, אם כי היא נראית ומתקבלת על הדעת.

<u>משפט 5.13:</u> בתנאי 5.11 אם $|\bar{T}| < 2^{\aleph_0}$ אז $\bar{T}$ קסבורית בכל

עוצמה $> |\bar{T}|$

<u>הוכחה:</u> לפי 5.12 כשנקח $\mu=\aleph_0$ כי כל מודל הוא רווי ב $\aleph_0$

וכל ספוס גדול בעוצמה סופית מתגשם כעוצמת המודל פעמים.

משפט 5.14: אם $\bar{T}$ קטגורית ב λ, $|\bar{T}|<\beth_\delta=\lambda$ אז $\bar{T}$ מקיימת את תנאי (5.10*)

הערה: מכאן יוצא ש $\bar{T}$ מקיימת את המשפטים 5.11 - 5.13.

הוכחה: נובעת מ [7], [19].

משפט 5.15 אם $\bar{T}$ קטגורית ב λ ו λ גדול ביחס ל $\aleph_0$ אז $\bar{T}$ מקיימת את תנאי (5.10*)

הערה: מכאן יוצא ש $\bar{T}$ מקיימת את המשפטים 5.11 - 5.13.

הוכחה: יהי M מודל של $\bar{T}$ בעוצמה λ. אם λ סדיר - גמרנו לפי 5.10. נניח ש λ סינגולרי: נניח שיש סדרה $\bar{a}$ במודל ופרדיקט R בשפה כך ש' $\aleph_0 \le |R(M,\bar{a})| = \mu < \lambda$ (לפי הוכחת 5.10)

נגדיר באינדוקציה את M_i $\mu^+ \ge i$, $M_0=M$, $M_\delta=\bigcup_{i<\delta} M_i$, $M_{i+1}=M_i^{\omega}/D$ כש D על מסנן על ω. נוכיח באינדוקציה ש M_i, $(\mu^+\ge i)$ הוא מודל של $\bar{T}$. $i=0$ - זה נתון, $i+1$ - זה נובע ממשפט 5.1, נותר המקרה $i=\delta$.

נניח ש $M_\delta \models \neg(Qx)\varphi(x,\bar{a})$ ו $\bar{a}$ סדרה ב M_δ, אז $\bar{a}$ היא סדרה ב M_j, $\delta > j$ ולכן $j \le i < \delta \Leftarrow R\,\varphi(M_{i+1},\bar{a})=[\varphi(M_i,\bar{a})]^{\omega}/D$

$$\varphi(M_{\delta_1},\bar{a})=\bigcup_{h<\delta_1}\varphi(M_h,\bar{a}) \qquad j<\delta_1\le\delta$$

קל להוכיח באינדוקציה מכאן ש $|\varphi(M_\delta,\bar{a}_1)| \le (\mu^+)^{\aleph_0} < \lambda$

יוצא ש M_{μ^+} הוא מודל של $\bar{T}$ מצד שני קל לראות כמו קודם שלכל $\bar{a}_1 \in M_{\mu^+}$, φ $|\varphi(M_{\mu^+},\bar{a}_1)| \ge \aleph_0 \Rightarrow |\varphi(M_{\mu^+},\bar{a}_1)| \ge \mu^+$ ולכן M_{μ^+} איננו איזומורפי ל M בסתירה לקטגוריות. לכן תנאי (5.10*) מתקיים.

קל לראות שבזה הוכח משפט 5.16 שהופיע בתחילת הפרק.

פ ר ק

קטגוריות בשני מונים

בפרק זה T תהיה תורה שלמה קבועה, ו Q פרדיקט קבוע ב $L(T)$

<u>הגדרה 6.1:</u>

1) $EC(T_1,\lambda,\mu)$ היא מחלקת המודלים M של T כך ש $\|M\|=\lambda$, $|Q(M)|=\mu$. מודל M, $M\in EC(T,\lambda,\mu)$ יקרא מודל $\langle\lambda,\mu\rangle$. חוץ מאשר במשפט 6.1. נניח תמיד ש $|T|<\mu<\lambda$

2) תורה T קטגורית ב $\langle\lambda,\mu\rangle$ אם יש לה מודל אחד ויחיד עד כדי איזומורפיזם ב $EC(T,\lambda,\mu)$.

<u>משפט 6.1:</u> אם T קטגורית ב $\langle\lambda,\lambda\rangle$ ו $\varkappa(\Pi)\neq\lambda>|T|$ אז יש $\mu(\Pi)>\mu$ כך ש T קטגורית ב $\langle\varkappa,\varkappa\rangle$ אם $\mu\leq\varkappa$ ואינה קטגורית ב $\varkappa$ אם $|T|<\varkappa<\mu$.

<u>הוכחה:</u> ההוכחה דומה מאד להוכחת 3.8, ולכן לא נפרטה.
ראשית קל לראות שיש $T\subset T_1$ $|T_1|=|T|$ כך ש $PC(T_1,T)$ קטגורית ב λ ו $PC(T_1,T)$ היא מחלקת המודלים M של T בהם $|Q(M)|=\|M\|$. לכן T קטגורית ב $\langle\varkappa,\varkappa\rangle$ אמם כל מודל $\langle\varkappa,\varkappa\rangle$י שלה הוא רווי. נראה שאין ל T מודל $\langle\varkappa,\varkappa\rangle$' שהוא רווי $|T|$ ואינו רווי. נניח ש M הוא כזה ו $M\supset A$, $p\in S(A)$ ו p מושמט. כיון ש $|A|<|Q(M)|$,
ו $(\forall\mu\geq|T|)\ K_T(\mu)=\mu^+$ הרי לפי 2.6 יש ב $Q(M)$ קבוצה בלתי מובחנת מעל A, $\{y_i:i<|T|^+\}$
גם כאן המודל הראשוני ב $|T|$ מעל $A\cup\{y_i:i<\lambda\}$) $\|M\|<\lambda=\beth[(2^{|T|})^+\times\alpha]$
ו y_i, $i<\lambda$ שן $|T|$ מוגדרים בצורה הטבעית)

משמיט את p, מצד שני $PC(T_1,T)$ קטגורית ב λ
ולכן כל מודליה ב λ הם רוויים. סתירה.

<u>משפט 6.2:</u> אם $\lambda_1^{\aleph_0}=\lambda_1$, $\lambda_2^{\aleph_0}=\lambda_2$ ו T קטגורית
ב $\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle$ אז T על יציבה.

<u>הוכחה:</u> לפי 5.3.1 יש ב $EC(T,\lambda_1,\lambda_2)$ מודל רווי $\aleph_1$. אם T
אינה על יציבה, אז לפי 5.3.2 יש ב $EC(T,\lambda_1,\lambda_2)$ מודל שאינו
רווי $\aleph_1$ ולכן אם T קטגוריות ב $\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle$ אז T היא
על יציבה.

<u>משפט 6.3:</u> אם T תורה יציבה, ויש לה מודל M בו
$|Q(M)|<\|M\|$ אז לכל $|T|\leq\mu_1<\lambda_1$ יש ל T
מודל M_1 כך ש $\lambda_1=\|M_1\|$, $\mu_1=|Q(M_1)|$

<u>הוכחה:</u> יהי R סדר טוב של $S(\lambda^+)$ (קבוצת הקבוצות
שעצמתן קטנה מ λ^+), ותהי $L(R)$ מחלקת הקבוצות הבנויות
(קונסטרוקטיביליות) מ $L(R)$, קל לראות שלכל מודל ב V שעצמתו
$\geq\lambda$ יש מודל איזומורפי ב $L(R)$ ולכן נוכל להניח ב.ה.כ.
שלעוצמות גדולות למדי השערת הרצף המוכללת נכונה. לפי
Chang [1] אם $\varkappa=2^{(\varkappa)}$ ו $\varkappa$ סדיר ו $|T|<\varkappa$ אז יש ל T מודל N_1
רווי $\varkappa$ בעוצמה $\varkappa^+$ כך ש $|Q(N_1)|=\varkappa$. מ $\varkappa=\varkappa^{|T|}$ יוצא כי
$K_T(\varkappa)=\varkappa^+$ ולכן יש ב N_1 קבוצה בלתי מובחנת מעל
$Q(N)$ שעוצמתה $\varkappa^+$ - $\{c_i: i<\varkappa^+\}$. נגדיר באופן טבעי את
המבנה $B=Q(N)\cup\{c_i: i<\beth(\varkappa,\omega)\}$. המודל הראשוני
ב $|T|^+$ מעל B, N_2 מקיים $\varkappa=|Q(N_1)|=|Q(N_2)|$
ולפי Vaught [20] יוצאת המסקנה.

<u>משפט 6.4:</u> אם ל T יש מודל M בו $\|M\|\geq\beth(|Q(M)|,\omega)$

אז לכל N יש מודל T_1 של $T \subset T_1$, $|T_1|=|T|$

כך שקיימות בו הסדרות $\langle y_i : i<\mu \rangle$ ו $\langle z_i : i<\lambda \rangle$ המקיימות

1) $y_i \in Q^N$

2) סדרה $\langle z_i : i<\lambda \rangle$ בלתי מובחנת מעל Q^N

3) סדרה $\langle y_i : i<\mu \rangle$ בלתי מובחנת מעל $\{z_i : i<\lambda\}$

4) כל אבר במודל הוא מהצורה $F(y_{i_1},\dots,y_{i_n},z_{j_1},\dots,z_{j_k})$

כש F פונקציה ב $L(T_1)$

5) כתוצאה מכך, מעל כל $\varkappa$ אברים מתגשמים לא יותר מ $|T|+\varkappa$

טפוסים שלמים במודל.

<u>הוכחה:</u> מידית, לפי Morley [10] בדומה ל Morley [9]

עד למשפט המסכם נניח כי:

<u>הנחה:</u> T קטגורית ב $\langle \lambda,\mu \rangle$ ו $\lambda,\mu \neq \varkappa(|T|)$, $\lambda>\mu>|T|$

ו 1) $\mu^{\aleph_0}=\mu$ ו $\lambda^{\aleph_0}=\lambda$

או 2) $\lambda \geq \beth(\mu,\omega)$,

<u>משפט 6.5:</u> המודל ה $\langle \lambda,\mu \rangle$-י של T מקיים:

1) מעל כל קבוצה של $\varkappa$ אברים מתגשמים לא יותר מ $|T|+\varkappa$

טפוסים.

2) כל מודל של T בעוצמה $\geq \mu$ נתן לשכון בו.

3) לכל $\varkappa$ כך ש $|T| \leq \varkappa < \mu$ קיים $K_T(\varkappa)=\varkappa^+$

<u>הוכחה:</u> 1) לפי 6.3 ו 6.2.

2) יהי M_1 מודל בעוצמה $\geq \mu$. אז לכל תת קבוצה סופית של

$T(|M_1|)$ יש מודל N בו $\|N\| \geq \beth(|Q(N)|,\omega)$ ולכן גם

ל $T(|M_1|)$ יש מודל כזה, ולכן יש לה מודל $\langle \lambda,\mu \rangle$-י (זה לפי Vaught [21]),

ולכן M_1 נתן לשכון ב M

3) ההוכחה מידית.

<u>טענה 6.6</u>: יהי $\mu \geq \varkappa$ מונה סדיר, אז:

1) ל T יש מודל M ובו קבוצה בלתי מובחנת מעל $Q(M)$ והיא $\{c_i : i<|T|^+\}$

2) ל T יש מודל M_1 הרווי ב $|T|^+$ בעוצמה μ ובו קבוצה בלתי מובחנת מעל $Q(M_1)$, $\{c_i : i<|T|^+\}$ ו $|Q(M_1)|=\mu$

3) ל T יש מודל $\langle\lambda,\mu\rangle$ הרווי ב $|T|^+$.

<u>הוכחה</u>: את 1) הוכחנו ב 6.3.

ברור שיש מודל כזה בעוצמה $|T|^+$, M_0. אם μ סדיר, כיון שהראנו כי $|T|\le\varkappa<\mu\Rightarrow K_T(\varkappa)=\varkappa^+\le\mu$ (במשפט 6.5), מ 3.3.1 נובע שיש ל M_0 הרחבה בעוצמה μ שהיא רוויה ב μ. אם μ סינגולרי, אז $\mu>\varkappa(|T|)$ ולכן T היא על יציבה, ו $K_T(\mu)=\mu^+$ ולכן $K_T(\mu)=\mu^+$ ו2) יוצא לפי 3.3.2. יהי M_1 מודל של T בעוצמה μ, $|Q(M_1)|=\mu$, M_1 רווי ב $|T|^+$, $\{c_i : i<|T|^+\}$ היא קבוצה שהיא בלתי מובחנת מעל $Q(M_1)$. נגדיר באופן טבעי את המבנה $Q(M_1)\cup\{c_i : i<\lambda\}$ ומעליו יש מודל ראשוני ב $|T|^+$, M_2. לפי 2.9, קל לראות כי $Q(M_1)=Q(M_2)$. הבעיה היחידה שנותרה היא האפשרות ש $\|M_2\|>\lambda$. אם מעל כל A, $M_2\supset A$, $\lambda=|A|$ לא יותר מ λ טפוסים שלמים מתגשמים ב M_2 קל למצוא תת מודל של M_2 שיספק את 3). נניח ש $M_2\supset A$, $|A|=\lambda$, ומספר הטפוסים ב $S(A)$ המתגשמים ב M_2 הוא $>\lambda$. ברור שבמקרה זה T איננה על יציבה ולכן $\mu<\varkappa(|T|)$.

כיון ש $\lambda\geq|A|, K_T(|A|)=|A|^+$ ברור כי $\lambda>\varkappa(|T|)$.

כמו כן ברור כי $|T|^{\aleph_0}=|T|$, $\mu^{\aleph_0}=\mu$. נוכל למצוא $A_1\subset A$ $|A_1|=\varkappa(|T|)>|T|$ ומעליו $>|A_1|$ טפוסים שונים שכל אחד מהם הוא אחוד שרשרת עולה באורך ω של טפוסים שמתגשמים

במודל (זה מוכח ב $Ressayre[12]$). נגדיר $M_3=M_2^{w}/\mathcal{D}$
($\mathcal{D}$ על מסנן לא ראשי כלשהו מעל w). ברור כי
$|Q(M_3)|=\mu$ ומעל קבוצה בעוצמה $|A|=\aleph_0|T|$ מתבשמים $<|A_1|$ טפוסים
לכן יש לנו מודל $\langle\mu,\lambda\rangle$ בו מעל קבוצה בעוצמה $|A_1|$ מתבשמים $<|A_1|$
טפוסים, ו $\lambda>|A_1|, |T|<|A_1|$ בסתירה ל 6.4.1.

<u>טענה 6.7:</u> T על יציבה ולכן $\varkappa\geq|T|\Rightarrow K_T(\varkappa)=\varkappa^+$

<u>הוכחה:</u> ולא - יש לנו $\mu_1>\beth[\varkappa,(2^{|T|})^+]$, $\lambda_1>\beth[\mu_1,(2^{|T|})^+]$
ויש מודל M , $\|M\|=\lambda_1$, $|Q^M|=\mu_1$, $cf\,\varkappa=\omega, \varkappa>\beth((2^{|T|})^+)$ ומעל כל
קבוצה בת $\varkappa\leq\varkappa_1$ אברים מתגשמים $\varkappa_1$ טפוסים, ויש קבוצה
$\varkappa$ ית מעליה יש $>\varkappa$ טפוסים ולכן לא מתגשם טפוס מסוים. לכן
לפי הכללה פשוטה של משפט 3.1, יש מודל $\langle\lambda,\mu\rangle$ של T
שאינו דורי $|T|^+$ סתירה.

<u>טענה 6.8:</u> אם $\mu\geq\varkappa$ מונה סדיר, אז ל T יש מודל $\langle\lambda,\mu\rangle$
הדורי ב $\varkappa$

<u>הוכחה:</u> כמו 6.6 בהסתמך על כך ש T על יציבה, ו $\kappa\geq|T|\Rightarrow K_T(\kappa)=\kappa^+$

<u>מסקנה 6.9:</u> המודל ה $\langle\lambda,\mu\rangle$ של T הוא דורי μ

<u>הוכחה:</u> לפי 6.8 לכל $\mu\geq\varkappa$, $\varkappa$ סדיר, המודל הוא דורי $\varkappa$.

<u>משפט 6.10:</u> כל מודל $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle$ של T שהוא דורי $|T|$ הוא
דורי μ_1.

<u>הוכחה:</u> נניח ש M סותר את טענת המשפט. נניח כי $A\subset M$, $\mu_1>|A|$
$p\in S(A)$ איננו מתגשם. תהי $\{a_i : i<|T|\}$ קבוצה בלתי
מובחנת מעל $A\cup Q(M)$ ו $\{b_i : i<|T|^+\}$ קבוצה בלתי מובחנת
מעל $Q(M)$ $A\cup\{a_i : i<|T|\}$
נגדיר באופן הטבעי את $A\cup\{a_i : i<|T|\}\cup\{b_i : i<\beth[|A|,(2^{|T|})^+]\}$

ויהי M_2 מודל ראשוני ב $|T|$ מעליו. יש כזה כי $\kappa(|T|)=|T|^+$
קל לראות שגם ב M_1 p איננו מתגשם, $\{a_i : i<|T|\}$ היא קבוצה
בלתי מובחנת מעל $A\cup Q(M_1)$

נגדיר באפן טבעי את המבנה $A\cup Q(M_1)\cup\{a_i : i<\beth(\|M_1\|,(2^{|T|})^+)\}$
יהי M_2 מודל ראשוני הדרוי ב $|T|$ מעליו. קל לראות ש p איננו
מתגשם ב M_2 ו $Q(M_2)=Q(M_1)$. מכאן, לפי הכללה פשוטה של
משפט 3.1 יוצא שיש מודל $\langle\lambda,\mu\rangle$-י של T שאיננו דרוי $|T|^+$
סתירה.

<u>משפט 6.11:</u> המודל ה$\langle\lambda,\mu\rangle$-י M של T מקיים:
אם p טפוס מעל M שעוצמתו $<\lambda$ ויש מודל M_1, $M\prec M_1$
$Q(M_1)=Q(M)$: המגשים את p אז p מתגשם ב M
<u>הוכחה:</u> יהי $\lambda\geq\varkappa$ מונה סדיר.

<u>מ.ע. 6.12:</u> ל M יש הרחבה אלמנטרית N, $Q(M)=Q(N)$, כך
שלכל טפוס ב $S(|M|)$ שיש הרחבה אלמנטרית N_1 של N כך ש
$Q(N_1)=Q(N)$ המגשימה אותו, מתגשם ב N.
<u>הוכחת מ.ע:</u> כיון ש T על יציבה $|S(|M|)|=\lambda$. נניח כי
$S(|M|)=\{p_i : i<\lambda\}$. נגדיר באינדוקציה את M_i כך ש $Q(M_i)=Q(M)$
$\lambda=\|M_i\|$, $M_0=M$. נניח כי M_i מוגדר, אם יש לו הרחבה
אלמנטרית השומרת על Q ומגשימה את p_i אז יש הרחבה כזו
שעצמתה λ וזה יהיה M_{i+1}; ולא $M_{i+1}=M_i$. לסודרים גבוליים
$M_\delta=\bigcup_{i<\delta}M_i$. יהי $N=M_\lambda$. קל לראות שאם יש ל N
הרחבה אלמנטרית השומרת על Q ומגשימה את p_i אז גם ל M_i
יש הרחבה כזו. (אותו מודל) ולכן הוא מוגשם ב N, והוכחנו
את משפט העזר.

נגש להוכחת המשפט. נגדיר באינדוקציה את M^i. $M^0=M$,

M^{i+1} הוא הרחבה אלמנטרית של M^i כך שכל טפוס p, $p\in S(|M_i|)$ שיש הרחבה אלמנטרית של M^{i+1} השומרת על Q ומגשימה את p מוגשם ב M^{i+1} וכן $Q(M^i)=Q(M^{i+1})$ ו M^{i+1} הוא מודל $\langle\lambda,M\rangle$. לסודרים גבוליים $M^\delta=\bigcup_{i<\delta}M_i$. קל לראות ש $M^\varkappa$ מקיים: אם p טפוס מעל $M^\varkappa$, $\varkappa>|p|$ ויש הרחבה N' של $M^\varkappa$, $Q(N')=Q(M^\varkappa)$ המגשימה אתו, אז p מוגשם ב $M^\varkappa$. זה נכון לכל $\varkappa\ge\lambda$ שהוא סדיר, ולכן בגלל הקטגוריות המשפט יוצא.

<u>משפט 6.13</u>: נניח כי M הוא מודל הרווי ב $|T|^+$ וכן גם N ; $Q(M)\subset N\subset M$, $\|N\|<\|M\|$, ו $|Q(N)|\ge|T|$ וכל טפוס סופי (= עם מספר סופי של משתנים) מעל $Q(M)$ המתגשם ב M מתגשם ב N ;
ו $q\in S(N)$ ו q איננו מתגשם ב M ואם $c_2,\dots,c_n\in N$ ו c_1 מגשים את q אז יש סדרה $\langle c_1',\dots\rangle$ מ N המגשימה מעל $Q(N)$ אותו טפוס כמו $\langle c_1,\dots\rangle$; אז יש הרחבה אלמנטרית M_1 של M , $Q(M)=Q(M_1)$, כך ש M_1 רווי ב $|T|^+$ ו M_1 מגשים את q

<u>הוכחה:</u> ברור שיש $B\subset N$, $|T|\ge|B|$ כך ש q הוא ההרחבה היחידה שות הדרגה של $q|B$ ב $S(N)$. לכל C, $\aleph_0>|C|$, ל $q|B$ יש הרחבה שות דרגה ב $S(B\cup C)$ (כי N רווי ב $|Q(M)|$), ולכן יש ל $q|B$ הרחבה שות דרגה ב $S(|M|)$ שנסמנה ב q_1. יהי c_1 אבר שיגשים את q_1 . אם יש מודל M_1 הראשוני ב $|T|$ מעל $|M|\cup\{c_1\}$ כך ש $Q(M_1)=Q(M)$ המשפט הוכח.
נניח שאין כזה, ואז לפי 2.9.2 יוצא שיש $|M|\supset B_1$ $|T|\ge|B_1|$ כך שלמודל M_1 הראשוני ב $|T|$ מעל $A_1=Q(M)\cup B\cup B_1\cup\{c_1\}$ קיים $Q(M_1)\ne Q(M_2)$. אם נראה שיש שכון אלמנטרי F של A_1 לתוך N כך שלכל $a\in Q(M)\cup B$ $F(a)=a$

ברור שנגיע לסתירה ונסיים את הוכחת המשפט.

נגדיר את F. ל $a \in Q(M)\cup B$ נגדיר $F(a)=a$.

נסדר את B_1 - $B_1=\{b_i : i<\alpha<|T|^+\}$ ונגדיר את $F(b_i)$

באינדוקציה על i. נניח שהגדרנו לכל $j>i$. לכל סדרה

סופית $\langle b_j, b^1, \dots\rangle$ (שאבריה שונים זה מזה) מתוך $B\cup\{b_i : i\le j\}$

יש סדרה $\langle c_0, \dots\rangle$ מתוך N שמגשימה אותו הטפוס מעל $Q(M)$

וכל קבוצה סופית של נוסחות $L(T)$, I, יש נוסחה ψ^I_φ שאומרת

ש $\langle x, F(b^1), \dots\rangle$ ו $\langle c_0, c_1, \dots\rangle$ מגשימות אותו טפוס

I י מעל $Q(M)$. קבוצת הנוסחות ψ^I_φ עוצמתה $\le |T|$ וקל לראות

שהיא הסרת סתירה, לכן יש אבר שמגשימה, ב N, והוא יהיה $F(b_1)$

קל לראות ש F תהיה העתקה אלמנטרית מ $Q(M)\cup B\cup\{b_i : i\le j\}$.

נותר לנו להגדיר רק את $F(c_1)$. נראה שאם $\bar a$ היא סדרה מ $Q(A)\cup B$

ו $i_0,\dots,i_n<\alpha$ ו φ_1 נוסחה,

אז $\varphi_1(x, b_{i_0},\dots,b_{i_m},\bar a)\in q_1$ אםם $\varphi_1(x, F(b_{i_0}),\dots,F(b_{i_n}),\bar a)\in q_1$

אם אין זה כך נגדיר

$$q_2=\{\varphi(x,F(b_{i_0}),\dots,F(b_{i_n}),\bar a) : \bar a\in Q(A)\cup B,\ i_0,\dots,i_n<\alpha,\ \varphi \text{ נוסחה},\ \varphi(x,b_{i_0},\dots,b_{i_n},\bar a)\in q_1\}$$

קל לראות ש $q_1 \restriction [Q(M)\cup B] = q\restriction [Q(M)\cup B]$.

ו $Rank(q|B)=Rank(q_2)=Rank(q_1)$

יוצא ש q_1, q_2 הנן הרחבות סותרות של $q|B$ ולכן לפחות אחת מהן דרגתה קטנה יותר, סתירה.

לכן, לפי הדרישות על q אפשר להגדיר את $F(c_1)$ ובזה נסתימה ההוכחה.

משפט <u>6.14</u>: אם M מודל $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle$ הרווי ב $|T|$, N גם הוא רווי ב $|T|$, $M\subset N$, $Q(N)=Q(M)$, $M\neq N$ ו q טפוס מעל M $\lambda_1>|q|$ ו q מושמט ב M ומוגשם ב N אז $M>M_1$

ו $\beth[(2^{|T|})^+] > \mu_1$

הוכחה: ב.ה.כ. $q \in S(A)$, $A \subset M$, $|A| < \lambda_1$. יהי c אבר ב N
המגשים את q ותהי $\{y_i : i < |T|^+\}$ קבוצה ב M שהיא בלתי
מובחנת מעל $Q(M) \cup A \cup \{c\}$. ברור שבכל מודל M_1 הראשוני
ב $|T|$ מעל $Q(M) \cup A \cup \{c\} \cup \{y_i : i < |T|^+\}$, $Q(M_1) = Q(M)$
ובכל מודל M_2 הראשוני ב $|T|$ מעל $Q(M) \cup A \cup \{y_i : i < |T|^+\}$
q מושמט. נגדיר את y_i לכל i, $|T|^+ \le i < \lambda_2 = \beth(\lambda_1, (2^{|T|})^+)$
באופן טבעי. ברור שבכל מודל M_1 הראשוני ב $|T|$ מעל
$Q(M) \cup A \cup \{c\} \cup \{y_i : i < \lambda_2\}$, $Q(M_1) = Q(M)$ ובכל מודל M_2 הראשוני
ב $|T|$ מעל $Q(M) \cup A \cup \{y_i : i < \lambda_2\}$ q מושמט. אם מסקנת המשפט
אינה מתקיימת, נקבל, בעזרת 3.1 סתירה ל 6.11.

משפט 6.15: אם M_1, M_2 הם מודלים $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle$ יים, הרוויים
ב $|T|$ (ולכן, לפי 6.9, רוויים ל μ_1

ו 1) אם q טפוס מעל M_1, $\lambda_1 > |q|$ ויש הרחבה M^1 של M
$Q(M_1) = Q(M^1)$ המגשימה את q אז q מתגשם ב M_2

2) כנ"ל ל M_2

אז M_1 ו M_2 הם איזומורפיים.

הוכחה: לפי 6.10 M_1 ו M_2 רוויים ב μ_1 לכן יש ל M_1
תת - מודל אלמנטרי M^1, $Q(M^1) = Q(M_1)$, $\|M^1\| = \mu_1$
וכל טפוס סופי מעל $|M^1|$ המוגשם ב M_1 מוגשם ב M^1 ו M^1
הוא רווי (או אם M_1 סינגולרי - M^1 הוא מודל מיוחד),
ל M_2 יש מודל מקביל, M^2, ברור ש M^1 ו M^2
איזומורפיים, ויהי F איזומורפיזם מ M^1 על M^2
נסמן $|M_1| = \{a_i : i < \lambda_1\}$ $|M_2| = \{b_i : i < \lambda_1\}$
נגדיר באינדוקציה את $M_{1,i}$ ו $M_{2,i}$ ו F_i ל $\lambda_1 \ge i$

ש: $M_1 \supset M_{1,i} \supset M^1$, $M_2 \supset M_{2,i} \supset M^2$, F_i הוא איזו. בין $M_{1,i}$

$M_{2,i}$. ל $j<i$ $M_{2,j} \subset M_{1,i}$, ו F_i

נרחיב את F_δ . לסודר גבולי δ קיים $M_{1,\delta}=\bigcup_{i<\delta} M_{1,i}$, $M_{1,\delta}=\bigcup_{i<\delta} M_{2,i}$

$F_\delta=\bigcup_{i<\delta} F_i$ ו $a_i \in M_{1,2i}$ ו $b_i \in M_{2,2i+1}$, $|M_{1,i}|$, $M_{2,i}$ רווי"ם ל $|T|$

אם נצליח להגדיר זאת, F_{λ_1} הוא איזומורפיזם בין M_1

M_2 ולכן הם איזומורפיים.

ל $i=0$ נגדיר $F_0=F$, $M_{1,0}=M^1$, $M_{2,0}=M^2$

לסודר גבולי δ - $F_\delta=\bigcup_{i<\delta} F_i$, $M_{2,\delta}=\bigcup_{i<\delta} M_{2,i}$, $M_{1,\delta}=\bigcup_{i<\delta} M_{1,i}$

נשאר המקרה של סודר עוקב. ב.ה.כ. נניח שעלינו להגדיר בעבור

$2i+1$. אם $a_i \in M_{1,2i}$ נגדיר $M_{1,2i+1}=M_{1,2i}$

$M_{2,2i+1}=M_{2,2i}$ ו $F_{2i+1}=F_{2i}$; ולא a_i

מגשים טפוס p מעל $M_{2,2i}$. אם הטפוס המתאים מעל

$M_{2,2i}$ $(F_{2i}(p))$ מתגשם ע"י אבר b , $b \in M_2$ נרחיב את F_{2i} ע"י ההגדרה

$F(a)=b$ ונסגור את $M_{1,2i} \cup \{a\}$ ו $M_{2,2i} \cup \{b\}$

למודלים ראשוניים ב $|T|^+$ שהם איזומורפיים, וכך נגדיר באופן הטבעי

את F_{2i+1} , $M_{1,2i+1}$, $M_{2,2i+1}$. נניח אם כן ש $F_{2i}(p)$ איננו

מתגשם מעל $M_{2,2i}$

ונקבל סתירה (לפי 6.13) להנחות המשפט.

<u>מסקנה 6.16</u>: יש תורות T_1 , T_1 , $|T_1|=|T_2|=|T|$, טפוסים p_1 ו p_2

כך ש T איננה קטגורית ב $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle$ אםם יש מודל $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle'$ של

T_1 המשמיט את p_1 או מודל $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle'$ של T_2 המשמיט

את p_2

<u>הוכחה</u>: לפי 6.13-4-5 אם T איננה קטגורית

ב $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle$ מתקיימת אחת מהאפשרויות הבאות:

1) ל T יש מודל $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle'$ שאיננו רווי ב $|T|$

2) ל T יש מודל $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle'$ שהוא רווי ב $|T|$ ויש

$q\in S(A)$, $A\subset M$, $|A|<\|M\|$, $M\subset N$ ו $Q(M)=Q(N)$, וגם N רווי

ב $|T|$! q מורגשם ב N ומושמט ב M כמו ב 6.1 יוצא שנוכל למצוא

M' ו N' , $Q(M')=Q(N'), A\subset M'\subset N'$, q

q מורגשם ב N' ומושמט ב M' ו $\beth(\lambda_1,(2^{|T|})^+)\leq\|M'\|$

בזה נובעת המסקנה , כמו ב6.15.

<u>הגדרה 6.2:</u> התורה T קטגורית ב $\langle\infty,\mu\rangle$ אם קיים λ_0

כך שבעבור כל $\lambda\geq\lambda_0$ T קטגורית ב $\langle\lambda,\mu\rangle$

<u>משפט 6.17:</u>(המשפט המסכם).

אם T קטגורית ב $\langle\lambda,\mu\rangle$ ו $\lambda>\mu>|T|$

? 1) $\lambda^{\aleph_0}=\lambda$ $\mu^{\aleph_0}=\mu$

או 2) $\lambda\geq\beth(\mu,\omega)$ ו $\mu,\lambda\neq\varkappa(|T|)$

אז: 1) אם T קטגורית ב $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle$, $\lambda_1>\mu_1>|T|$

אז T קטגורית ב $\langle\infty,\mu_1\rangle$

2) אם T קטגורית ב $\langle\infty,\mu_1\rangle$, $\mu_1>|T|$ אז יש

$\beth(\mu_1,(2^{|T|})^+)>\lambda_1$ כך ש T קטגורית ב $\langle\lambda_2,\mu_1\rangle$ אםם $\lambda_1\leq\lambda_2$

3) אם T קטגורית ב $\langle\infty,\mu_1\rangle$ אז T קטגורית

ב $\langle\infty,\mu_2\rangle$ לכל $\mu_1\leq\mu_2$ ולפחות μ_1 אחד ש $>\beth((2^{|T|})^+)$

<u>הוכחה:</u> מידית.

תיקונים

1) באומרנו על-מסנן (אולטרה-פילטר) נתכון לעל-מסנן לא ראשי.

2) הרבה פעמים נאמר הרחבה במקום הרחבה אלמנטרית.

3) אם לא נציין את ההפך, M, N יציינו מודלים של T

4) נכתוב לעיתים $\psi[\bar{a}]$ ולעיתים $\models \psi[\bar{a}]$ בלי להבדיל בין הסימונים.

5) בעמוד 3 קטע שני שורה 7 צ"ל

"מתברר שאם לתורה יציבה T יש מודל ההומוגני ב $(2^{|T|})^+$ שדיאגרמתו D, אז יש לה מודל ההומוגני ב λ שדיאגרמתו D לכל λ".

6) בע' מ' 26 שורה 3 מהסוף ברור שהכוונה היא ש $i_k, k < \beta$ היא סדרה עולה.

7) בע' מ 44 למטה ההוכחה אינה מפורטת אך לא קשה להבינה.

8) את משפט 5.7 הוכחנו למקרה $\mu > |T|$ בלבד.

9) בהוכחת 6.15, בעמוד 68 שורה 7, צריך להגדיר את $M_{1,0}$ כמודל ראשוני ב$|T|^+$ מעל M^1 המוזק ע"י M_1, את $M_{2,0}$ באופן מקביל כך שיש הרחבה של F לאיזומורפיזם בין $M_{1,0}$ ו $M_{2,0}$ F_0

בבליוגרפיה

[1] C.C. Chang, A note on the two cardinal theorem, Proc. AMS, 11 (1964), pp. 1148-1155.

[2] Helling, Doctoral dissertation.

[3] T. Frayne, A.C. Morel, D.S. Scott, Reduced direct products, Fund. Math. 51 (1962-63), pp. 195-228.

[4] G. Fuhrken, Languages with added quantifiers "there exists at least $\aleph_\alpha$," Proc. 1963 Berkeley Symposium on Theory of Models, North Holland Publ. Co., 1965, pp. 121-131.

[5] H. Gaifman, A generalization of Mahlo's method, Israel Jour. of Math., Vol. 5 (1967), pp. 188-200.

[6] H.J. Keisler, Some model theoretic results for ω-logic, Israel Jour. of Math., 4 (1966), pp. 249-261.

[7] H.J. Keisler, Models with orderings, to appear in Proc. of the 1967 International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science.

[8] H.J. Keisler and M. Morley, On the number of homogeneous models of a given power, Israel Jour. of Math., Vol. 5 (1967), pp. 73-78.

[9] M. Morley, Categoricity in power, Trans. AMS 114 (1965), pp. 514-538.

[10] M. Morley, Omitting classes of elements, in the Theory of Models, Proc. of the 1963 International Symp., North Holland Publ. Co., 1965, pp. 265-274.

[11] M. Morley and R. L. Vaught, Homogeneous universal models, Math. Scand. 11 (1962), pp. 37-57.

[12] J.P. Ressayre, "Sur les theories du premier order categorique en un cardinal," a preprint.

[13] F. Rowbottom, Notices of AMS, Vol. 11 (1964), p. 248.

[14] J. Schmerl and S. Shelah, a notice in Notices of AMS, to appear.

[15] S. Shelah, On saturation of ultrapowers, to appear.

[16] S. Shelah, On stable theories, to appear in Israel Journal of Math.

[17] S. Shelah, Classes with homogeneous models only, Notices of AMS, Vol. 15 (1968), p. 803.

[18] S. Shelah, Categoricity in power, Notices of AMS, Vol. 15 (1968) p. 930.

[19] S. Shelah, On models with ordering, Notices of AMS, Vol. 16 (1969), p. 580.

[20] R.L. Vaught, The Lowenheim-Skolem Theorem, in Proc. of the 1964 International Congress for Logic, Methodology and the Philosophy of Science, North Holland Publ. Co., 1965, pp. 81-89.

[21] R.L. Vaught, A Lowenheim-Skolem theorem for cardinals far apart, in the theory of Models, Proc. of the International Symposium, North Holland Publ. Co., 1963, pp. 390-401.

****

CATEGORICITY OF CLASSES OF MODELS

Thesis Submitted for the Degree "Doctor of Philosophy"

by

Saharon Shelah

Submitted to the Senate of the Hebrew University

on Ju~~ne~~ly 1969

This work was carried out under the
supervision of Professor M.O. Rabin

Sh:E75

CONTENTS

Sh:E75

ABSTRACT

In this work we shall try to generalize Morley's work on categoricity of theories. Morley proves that if a denumerable theory is categorical in one non-denumerable cardinality, then it is totally transcendental. Using some theorems on totally transcendental theories, he shows that if a denumerable theory is categorical in one non-denumerable cardinality, then it is categorical in every non-denumerable cardinality.

Let T denote a complete first-order theory.

We say that T is stable in a cardinality λ if in every model of T, on every set of power $\leq \lambda$, no more than λ different types are realized.

In the first chapter we show that if T is stable in one cardinality, then it is stable in every cardinality λ such that $\lambda^{|T|} = \lambda$. We also show that if T is unstable in one cardinality $\geq 2^{|T|}$, then T is unstable in every cardinality λ such that $\lambda^{\aleph_0} > \lambda$.

In the second chapter we prove that, if T is stable in λ, M a model of T of power $> \lambda$, A a subset of M of power $\leq \lambda$, then in M there exists an indiscernible set on A of cardinality $> \lambda$. We prove the existence of a prime model on every subset of a model of T,

among the $|T|^+$-saturated models of T. We also generalise Morley's rank of transcendence to stable theories.

In the third chapter we use the preceeding theorems to investigate categoricity of theories and pseudo-elementary classes. Among other theorems, we prove:

Theorem: If T is categorical in λ, $\lambda > |T|$, $\lambda \neq \inf\{\mu : \mu^{\aleph_0} > \mu + |T|\}$ then there exists $\lambda_0 < \mu(|T|)$, such that T is categorical in every power $\geq \lambda_0$, and T is not categorical in any power μ, $|T| < \mu < \lambda_0$.

The main result in the fourth chapter is:

Theorem: If T has only homogeneous models of power λ, $\lambda > |T|$, then there exists $\lambda_0 < \mu(|T|)$, such that every model of T of power $\geq \lambda_0$ is homogeneous, and in every power μ, $|T|^+ < \mu < \lambda_0$ T has a non-homogeneous model.

In the fifth chapter we investigate categoricity of theories in language $L_1 = L(Q_{\alpha})$ with the added quantifier "there exists x's in the power of the model." Our main result is:

Theorem: If T is a complete theory in L_1; and it is categorical in λ; and $\lambda_n < \lambda \Rightarrow \sum_{n<\omega} \lambda_n < \lambda$, or $\lambda = \beth_\delta$ (δ – a limit ordinal); and $\lambda > (2^{|T|})^+$, $|T| < \beth_\omega$; then T is categorical in every power $> |T|$.

In the sixth chapter we deal with categoricity of two-cardinals. Let T be a complete first-order theory with the designated predicate Q.

T is said to be categorical in $\langle\lambda,\mu\rangle$ if every two models of T, M, N, such that $\|M\| = \|N\| = \lambda$, $|Q^M| = |Q^N| = \mu$, are isomorphic. We prove

<u>Theorem:</u> If T is categorical in $\langle\lambda, \mu,\rangle$ $\lambda^{\aleph_0} = \lambda$, $\mu^{\aleph_0} = \mu$, $\lambda > \mu^+ > |T|^+$, then T is categorical in every pair $\langle\lambda_1,\mu_1\rangle$ such that $\lambda_1 \geq \beth[\mu_1,(2^{|T|})^+]$, $\mu_1 \geq \beth[(2^{|T|})^+]$.

(In fact we prove a little stronger theorem.)